Fraktale

Moritz Goldbaum

Berlin, den 1.12.2022

Inhalte

Begriffserklärung

Newton-Fraktale

Mandelbrotmenge

Fraktal

lateinisch: „fractus“ = „gebrochen“

bezeichnet geometrische Muster mit hohem Grad der Selbstähnlichkeit

„gebrochen“ wegen der gebrochenen Dimension (keine natürliche Zahl)

berühmte Fraktale:

- Mandelbrot-Menge
- Newton-Fraktale
- Julia-Mengen
- Pythagoras-Bäume

Newton-Verfahren

Verfahren zur Approximation zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen

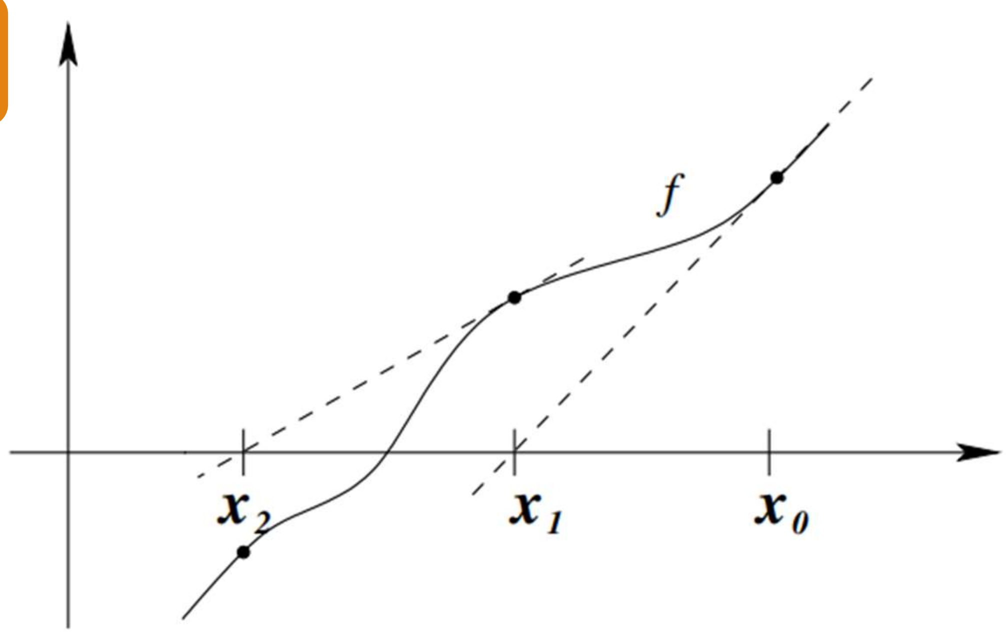
auch für Nullstellen von Funktionen

wähle Startwert x_0 auf x-Achse aus

bestimme Funktionswert $f(x_0)$

Lege Tangente an f an

Bestimme Nullstelle d. Tangente $\Rightarrow$ x_1



Gegeben: Funktion $f(x)$, Startwert x_0

Gesucht: Nächster Iterationswert x_1

Wissen: x_1 ist Nullstelle der Tangenten $t(x)$ an $f(x)$ an der Stelle x_0 und $t(x) = mx + n$

Wissen: Steigung von t = der von f an Stelle $x_0 \Rightarrow m = f'(x_0) \Rightarrow t(x_0) = f'(x_0) * x + n$

Wissen: $t(x)$ & $f(x)$ verlaufen beide durch $(x_0, f(x_0))$

$\Rightarrow t(x_0) = f'(x_0) * x_0 + n = f(x_0)$

$\Rightarrow n = f(x_0) - f'(x_0) * x_0$

$\Rightarrow t(x) = f'(x_0) * x + f(x_0) - f'(x_0) * x_0$

$t(x) = 0 \Rightarrow x = x_0 - {f(x_0)}/{f'(x_0)}$

Gegeben: $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, f$ einmal differenzierbar, $x0 \in D, \varepsilon > 0,\ \text{maxiter} \in \mathbb{N}, i = 0$

Gesucht: Nullstelle x_n

$while\ |f(x_i)| > \varepsilon$

$\quad if\ f'(x_i) > \varepsilon$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$\quad else$

$\quad\quad return\ null$

$\quad end\ if$

$\quad i = i + 1$

$\quad if\ i = maxiter$

$\quad\quad return\ null$

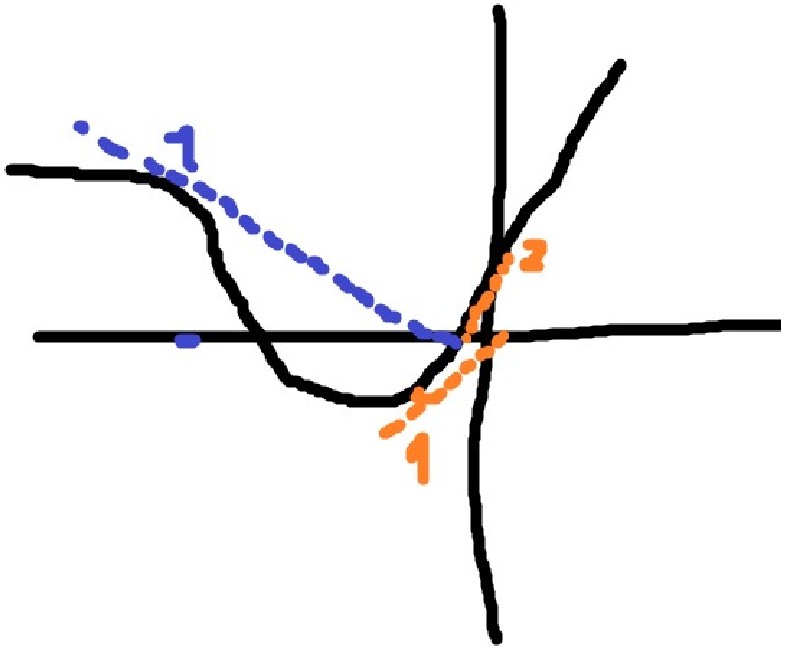
$\quad end\ if$

$end\ while$

je nach Startwert werden verschiedene Nullstellen angenähert

nicht immer die Nullstelle, welche dem Startwert am Nächsten liegt, wird angenähert

ohne Vorüberlegung quasi unvorhersehbar



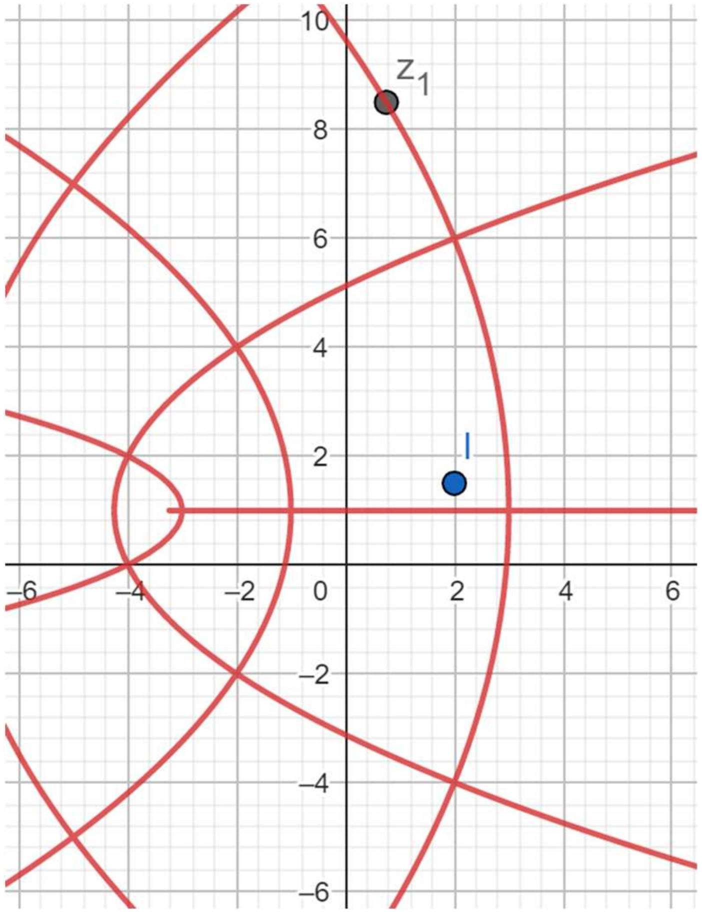
betrachte die komplexe Zahlenebene

diese entspricht der kartesischen Ebene ($\mathbb{R}^2$)

man kann nun den Definitions – und Wertebereich der Funktion auf $\mathbb{C}$ erweitern: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Beispiel: $f(z): \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 + z - 3 + i$

$f(2 + 1{,}5i) = (2 + 1{,}5i)^2 + (2 + 1{,}5i) - 3 + i$
$= 1{,}75 + 6i + 2 + 1{,}5i - 3 + i = 0{,}75 + 8{,}5i$



Betrachte Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2 + z - 3 + i$

und die Teilmenge $\{a + b * i = z \in \mathbb{C} | b = 0\} \subset \mathbb{C}$ aller komplexen Zahlen.

Obige Menge bezeichnet alle komplexen Zahlen mit Imaginärteil 0, d.h. $\mathbb{R}$

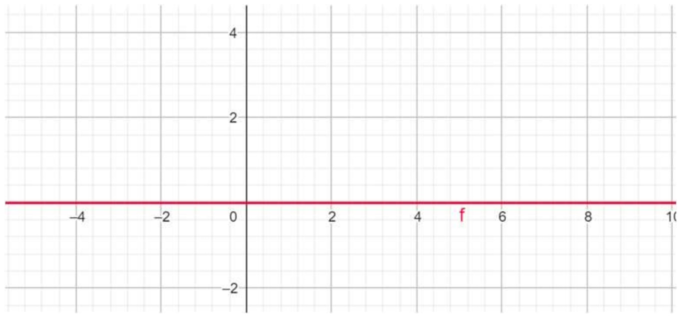
Um das Bild der reellen Zahlen unter f zu erhalten, wenden wir f auf $\mathbb{R}$ an:

Setzen wir für z also reelle Zahlen ein, so erhalten wir alle reellen Zahlen, die größer oder gleich -3 sind.

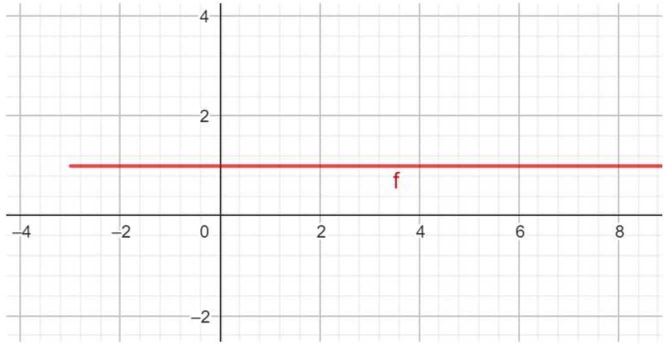
Addieren wir diese reellen Zahlen mit i, so erhalten wir alle komplexen Zahlen, deren Realteil ≥ -3 ist und deren Imaginärteil 1 beträgt.

Also die Teilmenge $\{a + b * i = z \in \mathbb{C} | a \geq -3, b = 1\} \subset \mathbb{C}$

Diese Teilmenge können wir in der komplexen Zahlenebene abbilden:



Die reellen Zahlen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene



Das Bild $f(\mathbb{R})$ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ unter f in der komplexen Zahlenebene

Betrachten wir nun alle komplexen Zahlen mit Imaginärteil 1:

$M = \{a + b * i = z \in \mathbb{C} | b = 1\} \subset \mathbb{C}$

Gesucht ist nun das Bild $f(M)$ von M unter der Abbildung f:

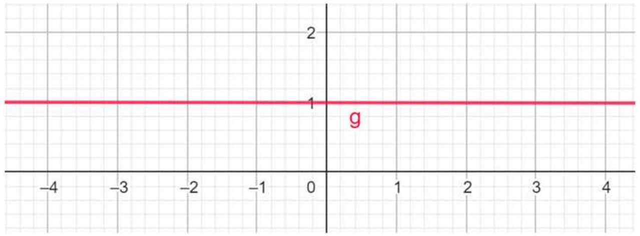
Sei dafür $z \in M$, das heißt $z = a + 1 * i, a \in \mathbb{R}$

$f(z) = f(a+i) = (a+i)^2 + (a+i) - 3 + i = a^2 + 2ai - 4 + a + 2i$

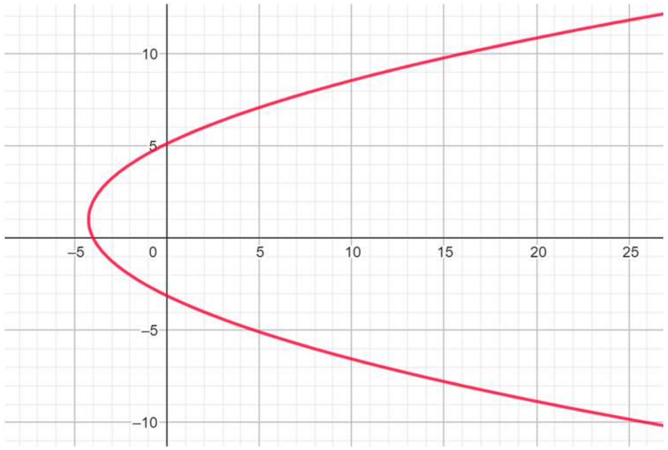
$= a^2 + a - 4 + 2ai + 2i$

Wir bemerken, dass $a^2 + a - 4 + 2ai + 2i$ nur von einer Variablen (a) abhängt, deshalb lässt sich $f(z)$ auch als Kurve $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ auffassen mit

$a \mapsto \left(x = a^2 + a - 4, y = 2a + 2\right)$ (siehe Bild)



Die Menge $M \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene



Das Bild $f(M)$ der Menge $M \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene

Dieses Vorgehen kann man nun für beliebige Teilmengen von $\mathrm{M} \subset \mathbb{C}$ durchführen:

Sei $z = a + b * i \in \mathbb{C}$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Man fixiere entweder a, oder b.

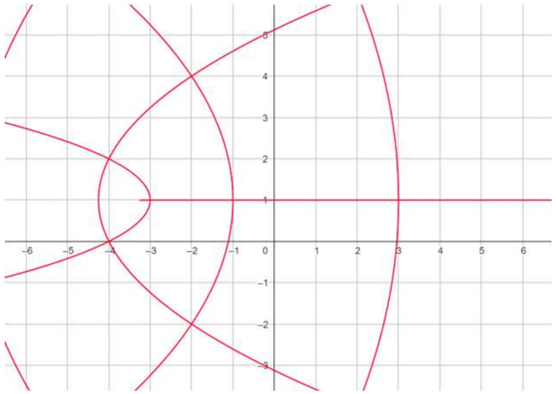
Die dadurch entstandene Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ ist eine Gerade, welche entweder parallel zur x-Achse oder zur y-Achse des Koordinatensystems ist.

Für alle **ganzzahlige** a, b erhalten wir also das Koordinatengitter.

Nun berechne man das Bild $f(M)$ von M. Das Bild ist eine komplexe Zahl, welche entweder von a oder von b abhängig ist. Somit kann man dieses Bild als Kurve interpretieren und zeichnen.

Folgende Skizze entsteht, wenn man das beschriebene Verfahren für alle ganzzahligen $a, b \in \mathbb{R}$ wiederholt und die Kurven in einem gemeinsamen Koordinatensystem skizziert.

Kurz gesagt, sieht man in der Abbildung das Bild des Koordinatengitters (für ganzzahlige Werte) unter der Funktion f. Das heißt, jede graue Linie (eine der Geraden) wird auf eine der roten Linien (eine der Kurven) abgebildet, wobei jede rote Linie eine einzelne Kurve darstellt.



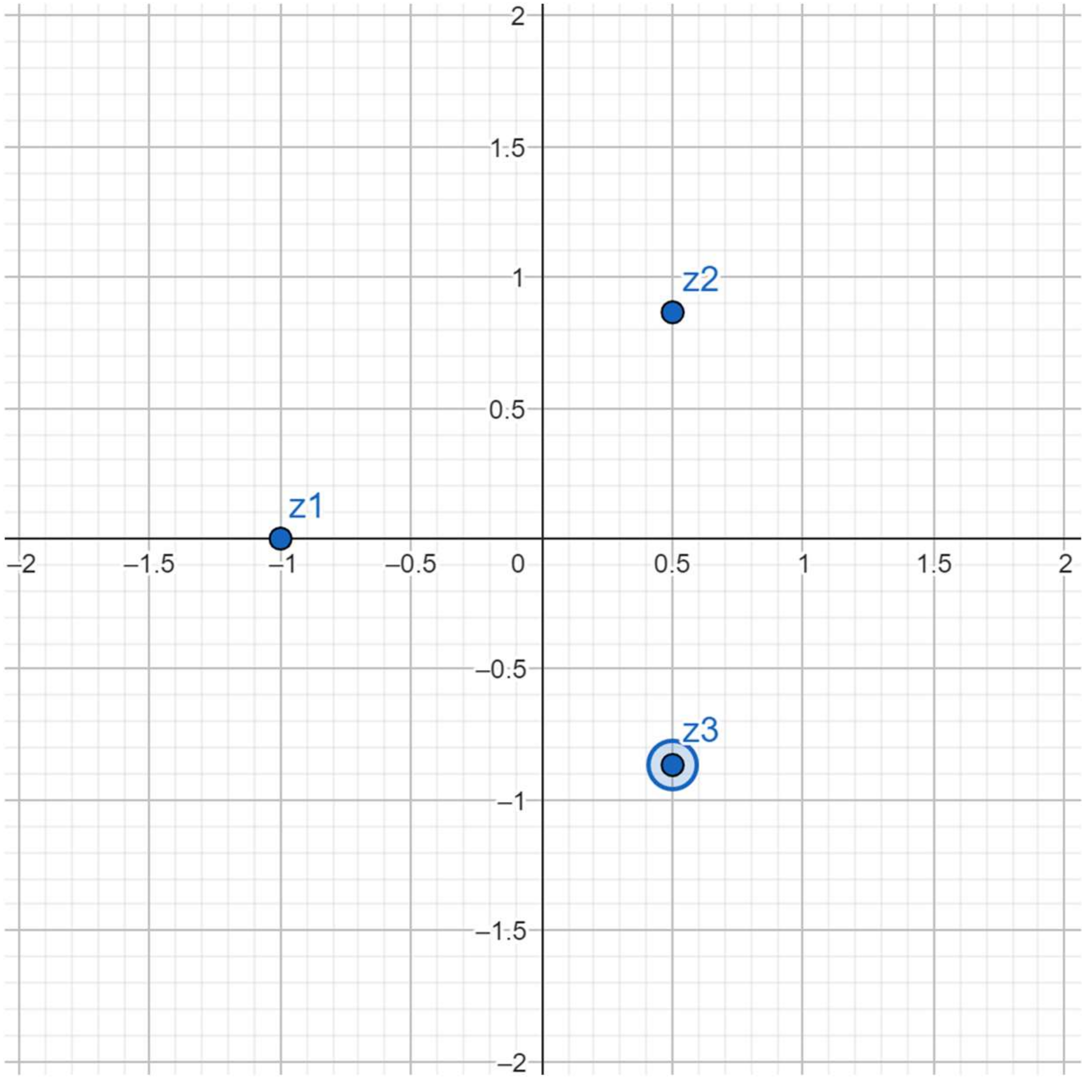
Beispiel:

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^3 + 1$ mit $f': \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 3z^2$

f hat genau 3 Nullstellen:

- $z_1 = -1$
- $z_2 = \frac{1}{2} + i * \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $z_3 = \frac{1}{2} - i * \frac{\sqrt{3}}{2}$

Startwert x_0	Angenäherte Nullstelle
$1 + i$	z_2
$1 + 0{,}5i$	z_2
$1 - 0{,}5i$	z_3
$1 - i$	z_3
$-1 + i$	z_1
$-1 - i$	z_1
$-0{,}4 + 0{,}4i$	z_3



Generierung von Newton-Fraktal für ein Polynom:

Gegeben: $f(z): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Bildbereich

Ordne jeder Nullstelle eine Farbe zu (passiert während der Berechnung, da Nullstellen zunächst unbekannt)

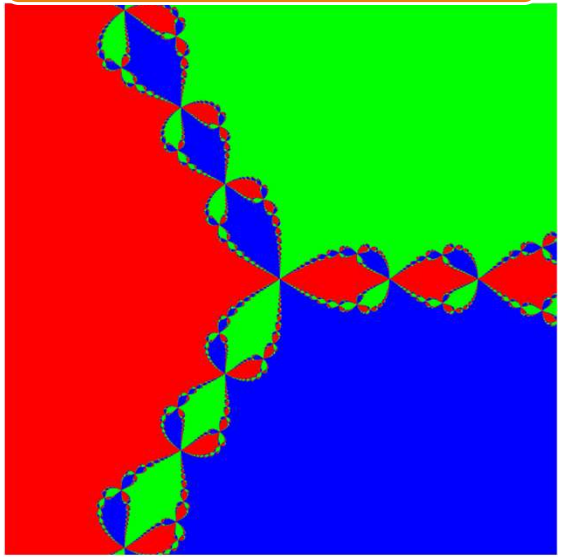
Für jeden Pixel im Bildbereich: Bestimme seine Koordinaten

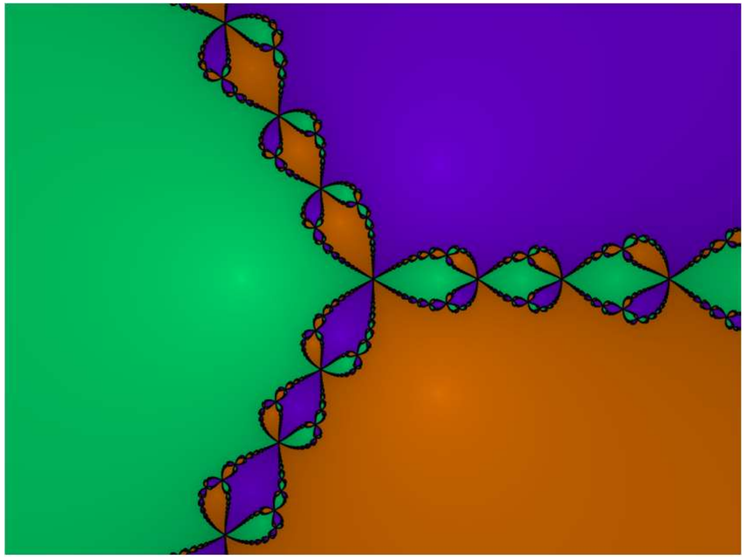
- x-Koordinate ist Realteil
- y-Koordinate ist Imaginärteil

wende Newton – Verfahren auf diese Zahl an

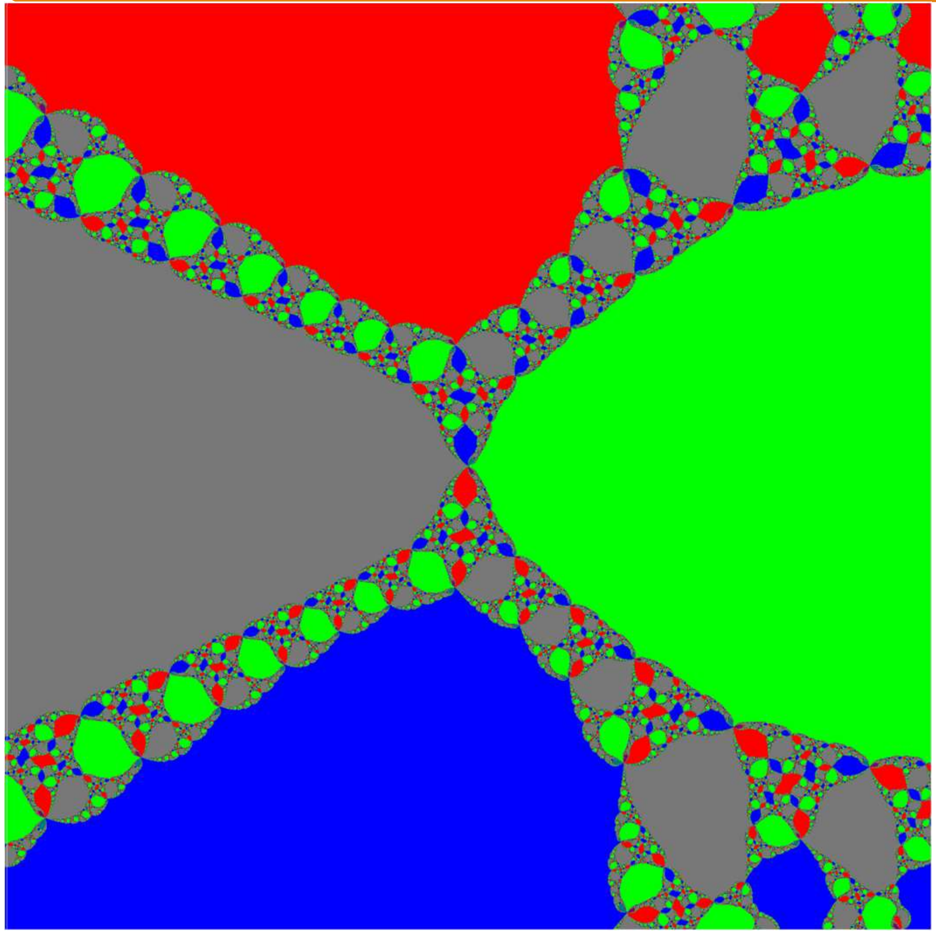
Färbe den Pixel je nach angenäherter Nullstelle

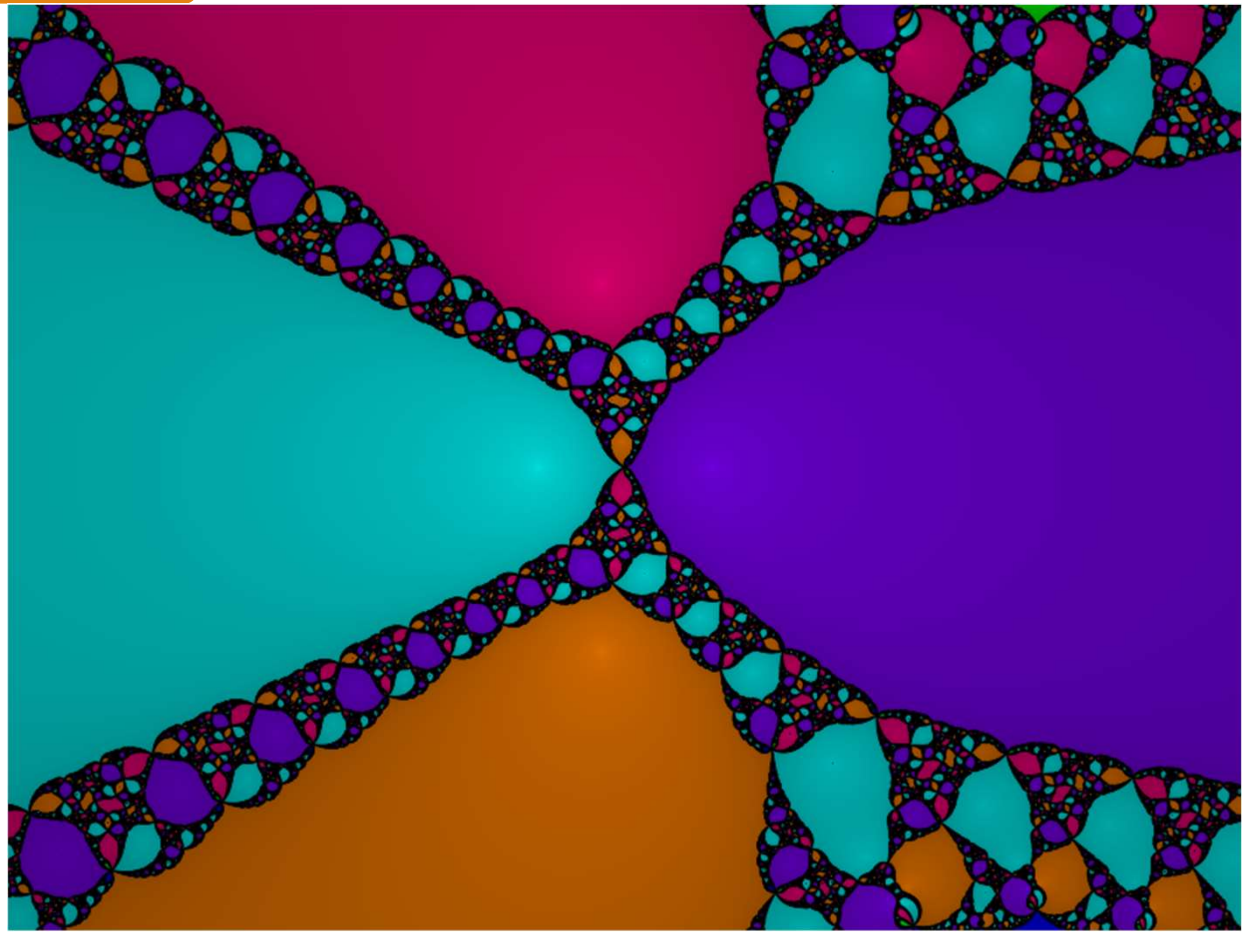
Fraktale für $f(z) = z^3 + 1$





Fraktale für $f(z) = -z^6 + 3z^5 - 9z^4 - 5z^2 + 1$





Betrachte die Iterationsvorschrift $z_{n+1} = {z_n}^2 + c$

Die Mandelbrot-Menge ist die Menge der komplexen Zahlen, für welche die Folge, welche mit der obigen Iterationsschrift gebildet wird, beschränkt ist.

Beispiel: $z = 1 + i, c = 0$

- $z_0 = 1 + i$
- $z_1 = 2i$
- $z_2 = -4 + 0i$
- $z_3 = 16$
- $z_4 = 256$

z_n ist offensichtlich nicht beschränkt, daher ist $z = 1 + i$ nicht in der Mandelbrot-Menge

Wir stellen fest: Sobald der Betrag $|z_n|$ jemals über 2 hinauswächst, wird die Folge divergieren

$\Rightarrow |z_n|$ ist das Abbruchkriterium

Gegeben: $z \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}, maxiter, i = 0$

$while\ |z| \leq 2$

$\quad z = z^2 + c$

$\quad i = i + 1$

$\quad if\ i = maxiter$

$\quad\quad return\ -1$

$\quad end\ if$

$end\ while$

$return\ i$

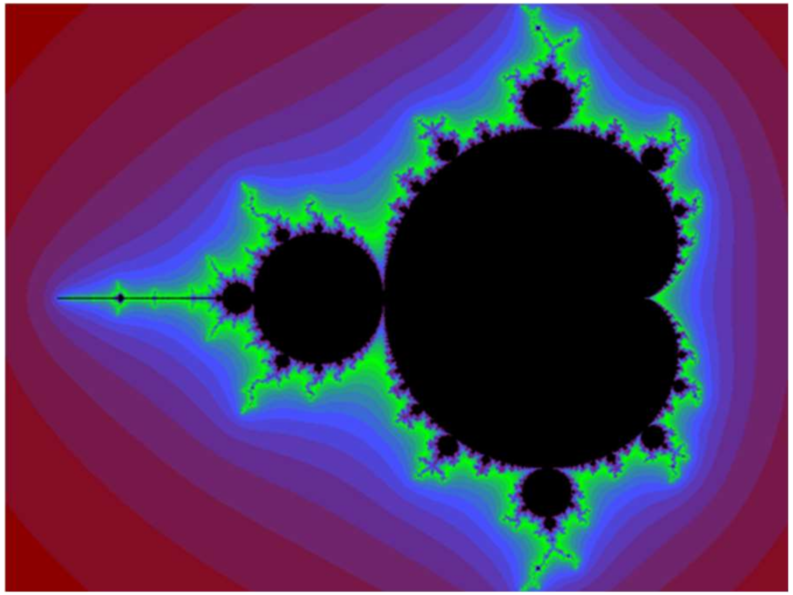
Wende diesen Algorithmus auf eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ an und erhalte den jeweiligen Rückgabewert

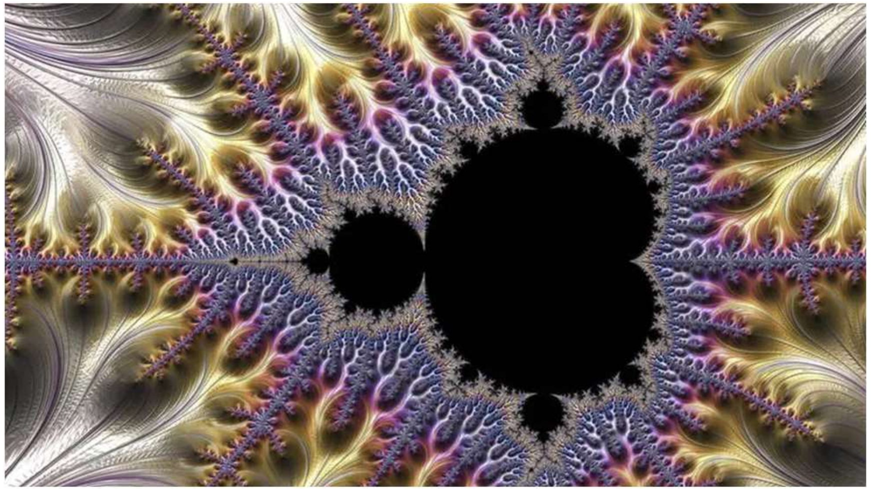
Bei Rückgabewert -1 scheint der Betrag von z nicht auf 2 zu steigen

$\Rightarrow$ Färbe den Punkt schwarz (er ist in der Menge)

Bei Rückgabewert i ist der Betrag von z auf (über) 2 gestiegen. Je Kleiner i,desto schneller ist klar: die Folge divergiert

$\Rightarrow$Färbe den Punkt abhängig von i in einer anderen Farbe





Teilmengen der komplexen Zahlenebene, wobei zu jeder Funktion eine Julia-Menge gehört. Das Komplement heißt Fatou-Menge.

Oft sind Julia-Mengen Fraktale

Wenn man eine auf $\mathbb{C}$ definierte Funktion f immer wieder auf ihre Funktionswerte anwendet, dann ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$ (Startwert) eine Folge komplexer Zahlen:

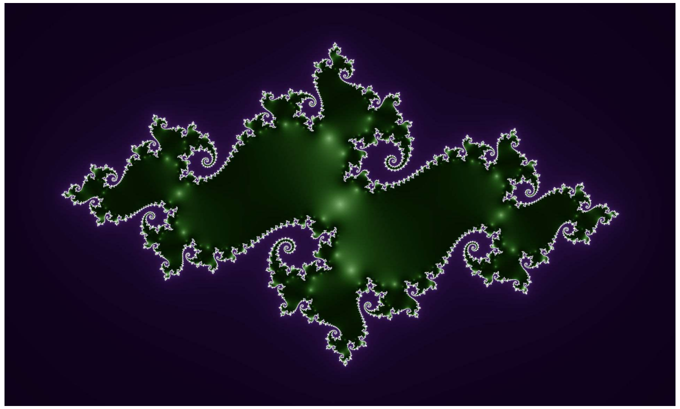
$$z \mapsto f(z) \mapsto f\big(f(z)\big) \mapsto \cdots$$

Je nach Startwert hat diese Folge zwei Verhaltensweisen:

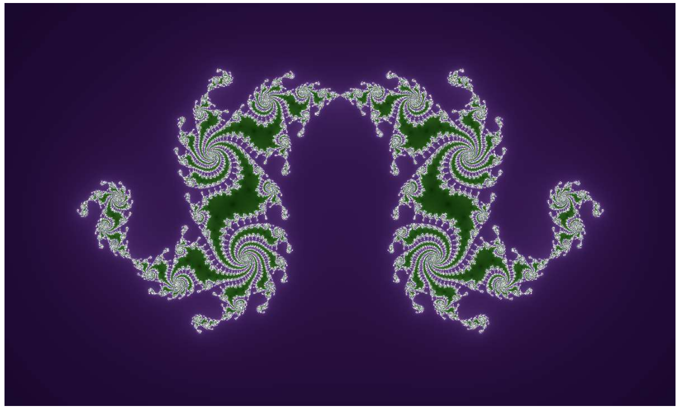
- Eine kleine Änderung des Startwertes führt zu einer ähnlichen Folge

-Eine kleine Änderung des Startwertes führt zu anderem Verhalten der Folge

Im zweiten Fall ist der Startwert in der Julia-Menge der Funktion enthalten



Julia-Menge für ein Polynom zweiten Grades



Julia-Menge für ein Polynom dritten Grades

Vorlesung „Angewandte Mathematik“ - Dr. Benjamin Jurgelucks

https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal

https://de.wikipedia.org/wiki/Newtonfraktal

https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge

https://www.youtube.com/watch?v=-5e2cULI3H8

https://www.youtube.com/watch?v=lx8RcYcYVuU

https://www.youtube.com/watch?v=PBvLs88hvJ8

https://www.youtube.com/watch?v=FFftmWSzgmk

https://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ws06_07/seminar_fraktale/ausarbeitung_voelkel.pdf