Geburtstagsparadoxon & Das Buffon-Nadelproblem

Mariam Burdiladze

Themen

Geburtstagsparadoxon
(Klassisch)

Geburtstagsparadoxon
(Mit Schaltjahren)

Buffon-Nadel Problem

Geburtstagsparadoxon

“Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 23 Personen mindestens zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag haben?”

Einschränkungen in das Geburtstagsproblem

- Keine Schaltjahre
- Keine Zwillinge
- Keine jahreszeitliche Schwankungen
- usw.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben

$$p(n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right)$$

Wir betrachten n zufällige Leute, und nehmen an, dass die übliche Vereinfachungen (das Jahr hat 365 Tage, keine jahreszeitlichen Schwankungen, keine Zwillinge usw.) gelten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben

$$p(n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right)$$

$p(23) = {}^{365}\!/_{365} * {}^{364}\!/_{365} * \ldots * {}^{343}\!/_{365} = 0.4927$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mind. 2 an einem Tag Geburtstag haben

$$P = 1 - p(23) = 1 - 0.4927 = 0.5073$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mind. 2 an einem Tag Geburtstag haben

$$P = 1 - p(23) = 1 - 0.4927 = 0.5073$$

➔ Bei 50 Personen liegt die Wahrscheinlichkeit über 97%

Themen

Geburtstagsparadoxon
(Klassisch)

Geburtstagsparadoxon
(Mit Schaltjahren)

Buffon-Nadel Problem

Was passiert, wenn wir Schaltjahre berücksichtigen?

- Nicht mehr alle Tage sind gleich wahrscheinlich
- Da ein Schaltjahr nur alle 4 Jahre stattfindet, haben wir 365.25 Tage zur Auswahl, an denen man Geburtstag haben kann

Wir beobachten 2 Fälle:

1. Jeder im Raum hat einen einzigartigen Geburtstag und **niemand** hat am 29. Februar Geburtstag. Das bezeichnen wir als P1(n).

Wir beobachten 2 Fälle:

1. Jeder im Raum hat einen einzigartigen Geburtstag und **niemand** hat am 29. Februar Geburtstag. Das bezeichnen wir als P1(n).

2. Jeder im Raum hat einen einzigartigen Geburtstag und **genau eine** Person hat am 29. Februar Geburtstag. Das bezeichnen wir als P2(n)

Wir beobachten 2 Fälle:

1. Jeder im Raum hat einen einzigartigen Geburtstag und **niemand** hat am 29. Februar Geburtstag. Das bezeichnen wir als P1(n).

2. Jeder im Raum hat einen einzigartigen Geburtstag und **genau eine** Person hat am 29. Februar Geburtstag. Das bezeichnen wir als P2(n)

Diese Fälle überschneiden sich nicht und decken alle Möglichkeiten ab, bei denen jeder einen anderen Geburtstag hat.

Wir beobachten 2 Fälle:

1. Jeder im Raum hat einen einzigartigen Geburtstag und **niemand** hat am 29. Februar Geburtstag. Das bezeichnen wir als P1(n).

Dieser Fall ist sehr ähnlich der Berechnung die verwendet wurde, als die Geburtstage in Schaltjahren ignoriert wurden und betrachten die n-te Person.

$$P1(n) = \prod_{i=0}^{n-1} ((365 - i) \times \frac{4}{1461})$$

Zum Beispiel:

$$P1(24) = \frac{365 \times 4}{1461} \times \frac{364 \times 4}{1461} \times \frac{363 \times 4}{1461} \dots \times \frac{342 \times 4}{1461}$$

Wir beobachten 2 Fälle:

2. Jeder im Raum hat einen einzigartigen Geburtstag und **genau eine** Person hat am 29. Februar Geburtstag. Das bezeichnen wir als P2(n).

Hier multiplizieren wir P1(n-1) (Die wahrscheinlichkeit, dass alle andere Personen einzigartigen Geburtstag haben) mit der warscheinlichkeit, dass genau eine Person am 29. Februar gGeburtstag hat und mit n (für die Anzahl der möglichen Personen die am 29. Februar Geburstag haben können).

$$P2(n) = P1(n-1) \times \frac{1}{1461} \times n$$

Unsere Lösung

In P1 und P2 haben wir die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass niemand an den selben Tag Geburtstag hat.
Um die Wahrscheinlicheit zu berechnen, dass 2 beliebige Personen an den selben Tag Geburtstag haben, müssen wir die P1 und P2 addieren und von 1 subtrahieren.

- $P(n) = 1-(p1(n) + p2(n))$

Unsere Lösung

- $P(n) = 1-(p1(n) + p2(n))$
- $p1(22) + p2(22) = 0.5247236$
- $p1(23) + p2(23) = 0.493135$

Themen

Geburtstagsparadoxon
(Klassisch)

Geburtstagsparadoxon
(Mit Schaltjahren)

Buffon-Nadel Problem

Das Buffonsches-Nadel Problem

- Wenn man eine kurze Nadel auf liniertes Papier fallen lässt - wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel so liegen bleibt, dass sie eine der Linien kreuzt?

Was ist eine “kurze Nadel”?

- ***d*** - Abstand zwischen den Linien des papiers
- ***l*** – Länge der Nadel
- Eine kurze Nadel ist eine Nagel der länge ***l≤d***

$$p = \frac{2}{\pi}\frac{\ell}{d}.$$

- p ≔ die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel in einer Position zu liegen kommt, in der sie eine der Linien des Papiers kreuzt

$$\frac{2\ell N}{dP}$$

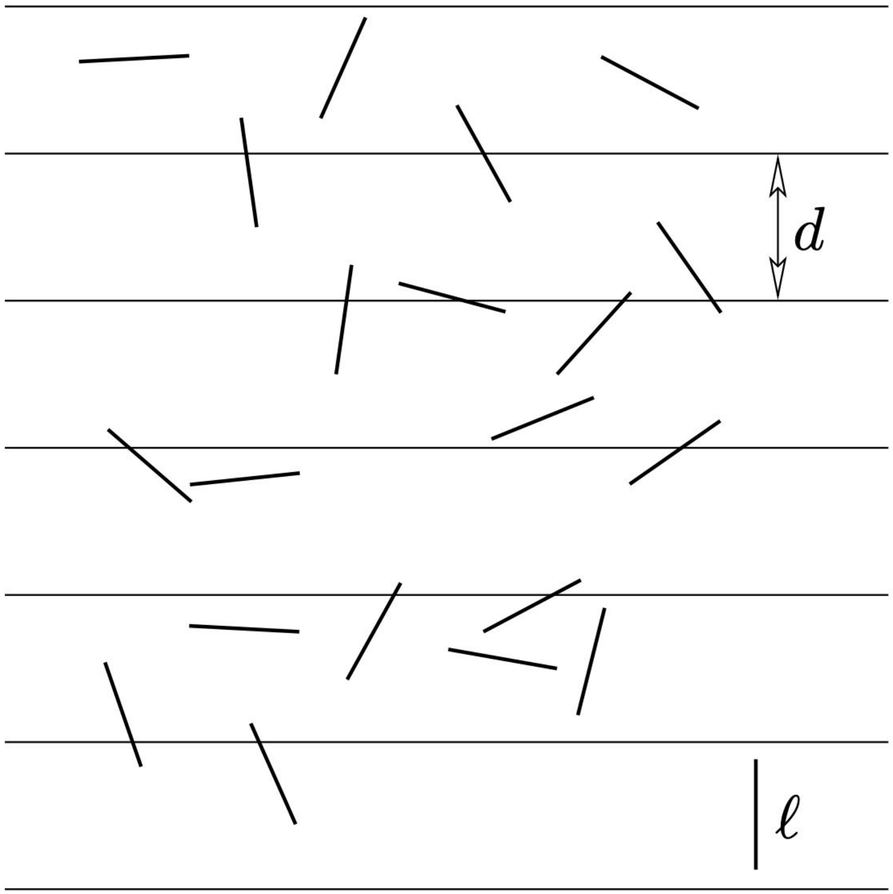
- *Man hat die Nadel N mal fallen lassen*
- *In P Fällen hat man einen Kreuzungspunkt erhalten*
- *Hierdurch lässt sich der π Wert annähern*

Lazzarinis Bericht

Mario Lazzarini hat in 1901 einen Experiment durchgeführt mit:

- $l = 5$
- $d = 6$
- $N = 3408$
- $P = 1808$

Und hat die Näherung $\pi \simeq 3{,}1415929\ldots$ erhalten



Erwartete Anzahl der Kreuzungspunkte

- Wenn man irgendeine Nadel fallen lässt, kurz oder lang:

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots$$

Erwartete Anzahl der Kreuzungspunkte

- Wenn man irgendeine Nadel fallen lässt, kurz oder lang:

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass wir mind. 2 kreuzungspunkte erhalten:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Erwartete Anzahl der Kreuzungspunkte

- Wenn man irgendeine Nadel fallen lässt, kurz oder lang:

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass wir mind. 2 kreuzungspunkte erhalten:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

- Wenn man eine kurze Nadel fallen lässt :

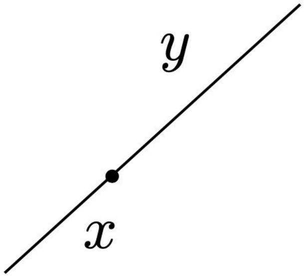
$$p_2 = p_3 = \dots = 0$$

$$E = p$$

Wir nutzen die Linearität des Erwartungswerts

- E(*l*) - Die Erwartete Anzahl an von Kreuzungen für einen Nadel der Länge *l*

- Wir teilen die Länge *l* in 2 Teile : x und y:



$$E(x+y) \;=\; E(x)+E(y);$$

Wir nutzen die Linearität des Erwartungswerts

- Mit Induktion über n lässt es sich leicht erschließen, dass:
- E(nx) = n E(x) für alle n,
- mE(n/m *x) = E (nx) = nE(x) so, dass E(rx) = rE(x) für alle Rationale Zahlen
- E(x) hängt von x monoton ab, also E = cx für alle x >= 0. Wobei c = E(1) eine Konstante ist.

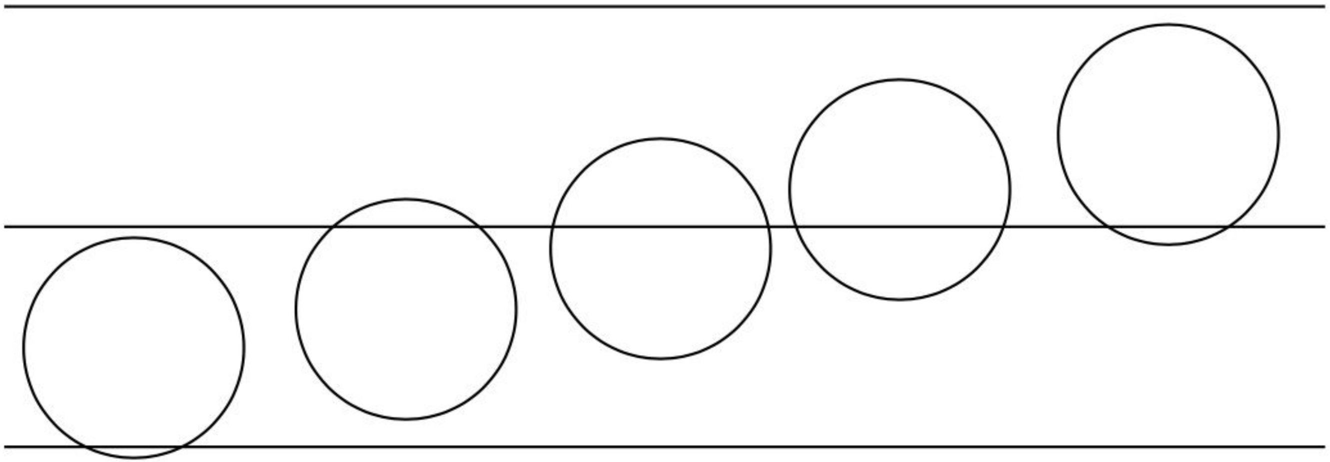
Wir nutzen die Linearität des Erwartungswerts

- Mit Induktion über n lässt es sich leicht erschließen, dass:
- E(nx) = n E(x) für alle n,
- mE(n/m *x) = E (nx) = nE(x) so, dass E(rx) = rE(x) für alle Rationale Zahlen
- E(x) hängt von x monoton ab, also E = cx für alle x >= 0. Wobei c = E(1) eine Konstante ist.

Aber welche Konstante?

Unsere Lösung:

- Wir betrachten einen Perfekten Kreis C mit Durchmesser *d*, die die Länge $x = d\pi$ hat.
- Ein solcher Nadel liefert auf liniertes Papier immer genau 2 Schnittpunkte



Unsere Lösung

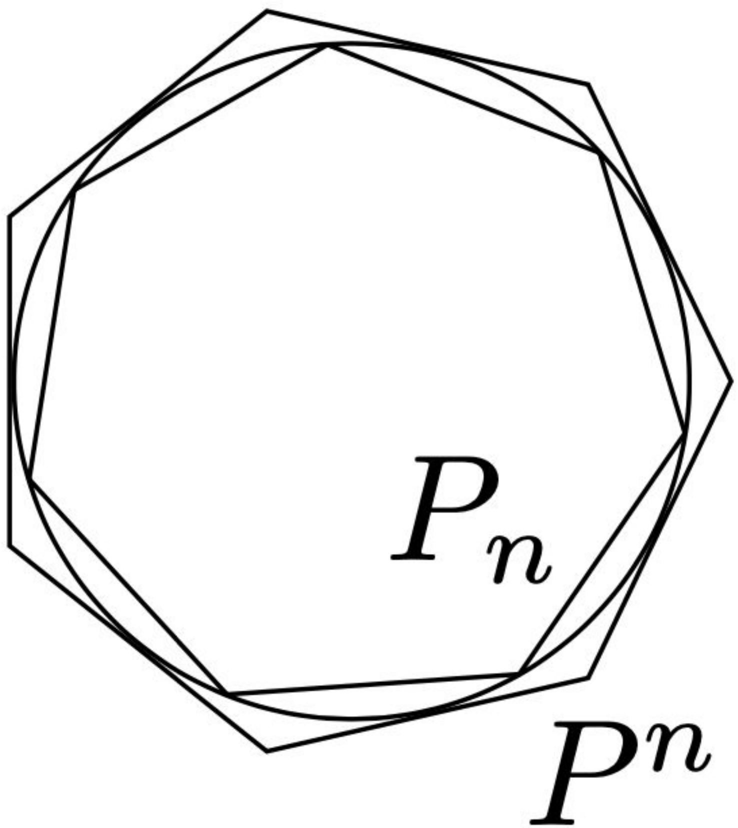
-Die Kreislinie lässt sich durch Polygone approximieren

-Wir stellen uns vor, dass wir mit C immer ein **einbeschriebenes regelmäßiges n-eck P_n** und ein r**egelmäßiges umbeschriebenes n-Eck P^n** fallen lassen

-eine Linie schneidet P_n => die schneidet auch C => die schneidet auch P^n

- Also wird die erwartete Anzahl von Schnittpunkten erfüllt

$$E(P_n) \leq E(C) \leq E(P^n).$$



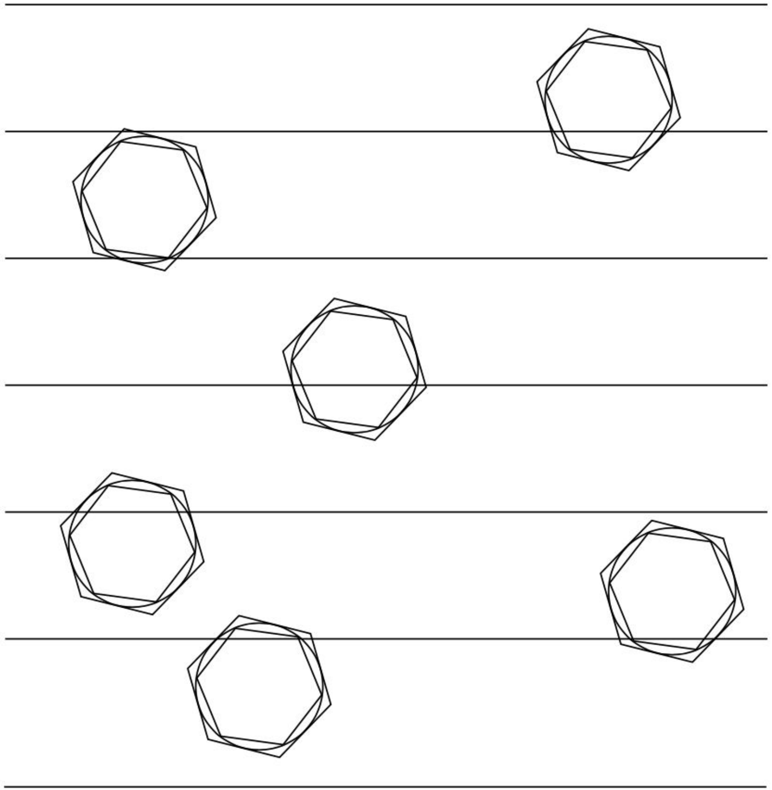
Unsere Lösung

-Erwartete Anzahl für beide Polygone ist "genau c mal die Länge", für C ist das genau 2. Wir können schließen: (1)

$$c\,\ell(P_n) \;\leq\; 2 \;\leq\; c\,\ell(P^n).$$

-Beide, P^n und P_n approximieren C für $n \to \infty$. Das Liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \ell(P_n) \;=\; d\pi \;=\; \lim_{n\to\infty} \ell(P^n),$$



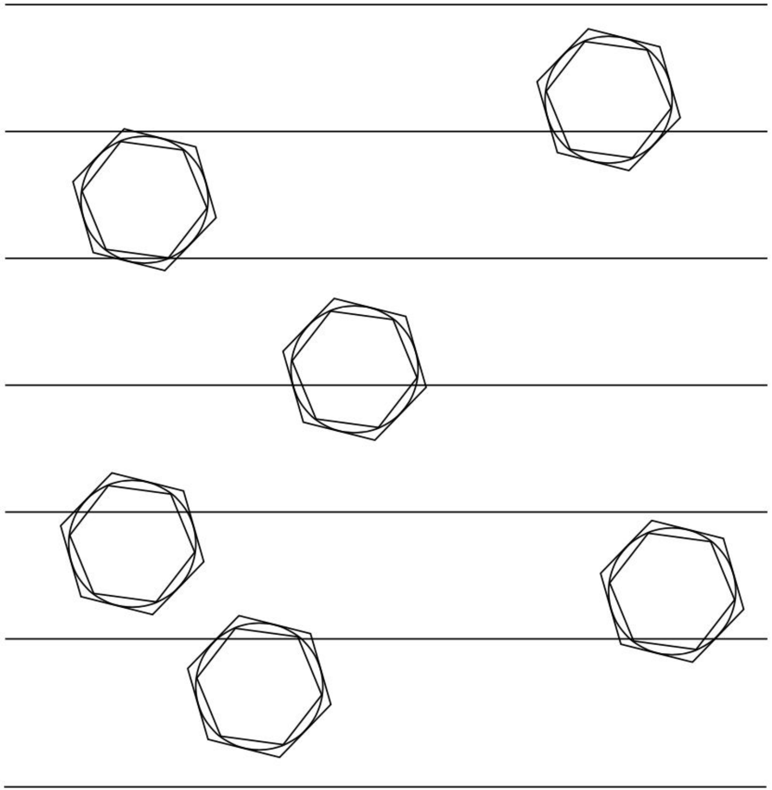
Unsere Lösung

-Dann folgt aus (1), dass mit n →∞ gilt:

$$c\,d\pi \quad \leq \quad 2 \quad \leq c\,d\pi$$

Und somit gilt :

$$c = \frac{2}{\pi}\frac{1}{d}. \qquad \square$$



Quellen

Das BUCH der Beweise, Martin Aigner · Günter M. Ziegler , 5. Auflage
Seiten: 132-133, 213-215, 244-245

Shared Birthdays w/ Leap Year Considered
http://delphiforfun.org/programs/math_topics/shared_birthdays_leap.htm