Das Bertrandsche Postulat

Quang Hieu Ta
Berlin, 24.11.2022

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

Übersicht

1. Das Bertrandsche Postulat
2. Beweis von Erdős
3. Quelle

Das Bertrandsche Postulat

Das Bertrandsche Postulat

- Französischer Mathematiker und Pädagoge *11. März 1822 † 5. April 1900

- 1845 Bertrandsches Postulat

Das Bertrandsche Postulat
Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.

Joseph Louis François Bertrand

Das Bertrandsche Postulat

- Russischer Mathematiker *16. Mai 1821 †8. Dezember 1894

- 1850 Bertrandsches Postulat vollständig bewies

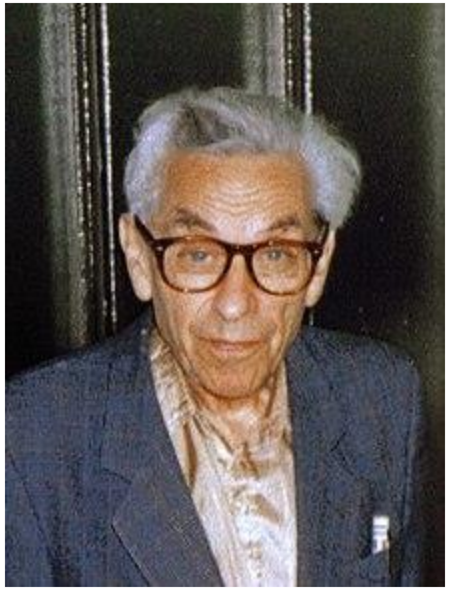
Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow

Das Bertrandsches Postulat

- einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts

-* 26. März 1913 in Budapest, Österreich-Ungarn; † 20. September 1996 in Warschau, Polen

- 1932 einfachen Beweis des Bertrandsches Postulats lieferte



Paul Erdős

Beweis von Erdős

Beweis von Erdős

1. Beweis für $n \leq 511$

Beweis von Erdős

1. Beweis für $n \leq 511$

- Landau-Trick

2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 521

- jede Primzahl ist kleiner als zweimal die vorhergehende

- Also enthält jedes Interval $\{y : n < y \leq 2n\}$, mit $n \leq 511$, eine dieser elf Primzahlen.

Beweis von Erdős

2. Zu zeigen: $\prod_{p \leq x} p \;\leq\; 4^{x-1}$ für alle reellen x ≥ 2 (1)

Beweis von Erdős

2. Zu zeigen: $\prod_{p \leq x} p \ \leq \ 4^{x-1}$ für alle reellen x ≥ 2 (1)

- Für die größte Primzahl q ≤ x gilt:

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \ \ und \ \ 4^{q-1} \leq 4^{x-1}$$

Beweis von Erdős

2. Zu zeigen: $\prod_{p \leq x} p \ \leq \ 4^{x-1}$ für alle reellen x ≥ 2 (1)

- Für die größte Primzahl q ≤ x gilt:

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \ \ und \ \ 4^{q-1} \leq 4^{x-1}$$

- Damit reicht es,(1) für den Fall zu zeigen, dass x = q eine Primzahl ist.

- Beweis per Induktion.

Beweis von Erdős

- Induktionsanfang: Für $q = 2$ erhalten wir $2 \leq 4$.

Beweis von Erdős

- Induktionsanfang: Für $q = 2$ erhalten wir $2 \leq 4$.
- Wir kümmern nur um ungeraden Primzahlen $q = 2m+1$
- Induktionsschritt:

Beweis von Erdős

- Induktionsanfang: Für q = 2 erhalten wir 2 ≤ 4.
- Wir kümmern jetzt nur um ungeraden Primzahlen q = 2m+1
- Induktionsschritt:

$$\prod_{p \le 2m+1} p = \prod_{p \le m+1} p \ . \prod_{m+1 < p \le 2m+1} p \le 4^m \binom{2m+1}{m} \le 4^m 2^{2m} = 4^{2m}$$

Wegen Induktionsvoraussetzung: $\prod_{p \le m+1} p \le \ 4^m$

Beweis von Erdős

Zu zeigen:

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$$

- $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ ist eine ganze Zahl
- die Primzahlen, die auf der linken Seite auftauchen, alle den Zähler (2m+1)! Teilen, aber nicht den Nenner m!(m+1)!.

Beweis von Erdős

Zu zeigen:

$$\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$$

$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} 1^k . 1^{2m+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}$$

$$\geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2 * \binom{2m+1}{m}$$

Da $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$

Beweis von Erdős

3. Der Satz von Legendre

Der Satz von Legendre
Die Zahl n! enthält den Primfaktor p genau $$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$$ Mal.

Beweis von Erdős

3. Der Satz von Legendre

Der Satz von Legendre

Die Zahl n! enthält den Primfaktor p genau

$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Mal.

Beweis: Genau $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ der Faktoren von n! = 1 · 2 · 3 · · · n sind durch p teilbar, was uns $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ p-Faktoren liefert. Weiter sind $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ der Faktoren von n! sogar durch p^2 teilbar, was die nächsten $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ Primfaktoren p von n! liefert, usw

Beweis von Erdős

Nach dem Satz von Legendre enthält $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$ den Primfaktor p genau

$$R(p,n) = \sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)$$

Mal.

Beweis von Erdős

Nach dem Satz von Legendre enthält $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$ den Primfaktor p genau

$$R(p,n) = \sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

Mal. Dabei ist jeder Summand höchstens 1, weil

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) = 2$$

Beweis von Erdős

Nach dem Satz von Legendre enthält $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$ den Primfaktor p genau

$$R(p,n) = \sum_{k\geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

Mal. Dabei ist jeder Summand höchstens 1, weil

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) = 2$$

$\Rightarrow \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$ enthält den Primfaktor p

$$R(p,n) = \sum_{k\geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leq \max\{r : p^r \leq 2n\} \qquad (2)$$

Beweis von Erdős

=> Die Primzahlen p > $\sqrt{2n}$ kommen höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$ vor. (R(p,n) ≤ 1)

Beweis von Erdős

=> Die Primzahlen p > $\sqrt{2n}$ kommen höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$ vor. (R(p,n) ≤ 1)

- Primzahlen p im Bereich $\frac{2}{3}n < p \leq n$ teilen den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ überhaupt nicht(R(p,n) = 0).

Beweis von Erdős

$\Rightarrow$Die Primzahlen p > $\sqrt{2n}$ kommen höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$ vor.

(R(p,n) ≤ 1) (3)

- Primzahlen p im Bereich $\frac{2}{3}n < p \leq n$ teilen den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ überhaupt nicht(R(p,n) = 0). (4)

Weil :

- Für 3p > 2n(und n≥3 und damit p≥3) sind p und 2p einzigen vielfachen von p, die im Zähler von $\frac{2n!}{n!n!}$ vorkommen, während wir zwei p-Facktoren im Nenner haben.

Beweis von Erdős

(4) Wir zeigen als Nächstes:

Für n ≥ 5:

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \,.\, \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \,.\, \prod_{n < p \leq 2n} p$$

Beweis von Erdős

Zu zeigen:

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$$

$$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n}.1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

Weil:

$$\binom{2n}{0} \leq \binom{2n}{1} \leq \cdots \leq \binom{2n}{n} \geq \binom{2n}{n+1} \geq \cdots \geq \binom{2n}{2n}$$

Dann

$$4^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq 2n * \binom{2n}{n}$$

Beweis von Erdős

Zu zeigen:

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \,.\, \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \,.\, \prod_{n < p \leq 2n} p$$

Ich bezeichne

R(p,n): die Anzahl des Auftreten von Primzahl p in $\binom{2n}{n}$, dann gilt:

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{R(p,n)} = \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{R(p,n)} \,.\, \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p^{R(p,n)} \,.\, \prod_{n < p \leq 2n} p^{R(p,n)}$$

Beweis von Erdős

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \le 2n} p^{R(p,n)} = \prod_{p \le \sqrt{2n}} p^{R(p,n)} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p^{R(p,n)} \cdot \prod_{\frac{2}{3}n < p \le n} p^{R(p,n)} \cdot \prod_{n < p \le 2n} p^{R(p,n)}$$

Wegen (2):

$$\prod_{p \le \sqrt{2n}} p^{R(p,n)} < \prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n$$

Wegen (3) und (4):

$$\prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p^{R(p,n)} \cdot \prod_{\frac{2}{3}n < p \le n} p^{R(p,n)} \cdot \prod_{n < p \le 2n} p^{R(p,n)} \le \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p^{1} \cdot \prod_{\frac{2}{3}n < p \le n} p^{0} \cdot \prod_{n < p \le 2n} p^{1}$$

$$= \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \le 2n} p$$

Beweis von Erdős

Wir haben bewiesen, für $n \geq 5$:

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \; . \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \; . \prod_{n < p \leq 2n} p$$

Wir bezeichnen mit P(n) die Anzahl der Primzahlen zwischen n und 2n, so erhalten wir (hier (1) wird verwendet)

$$\frac{4^n}{2n} < \left((2n)^{\sqrt{2n}}\right) . \left(4^{\frac{2}{3}n}\right) . (2n)^{P(n)}$$

Beweis von Erdős

Somit

$$4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)}$$

Nehmen wir den Logarithmus zur Basis 2, erhalten wir

$$P(n) > \frac{2n}{3log_2(2n)} - \left(\sqrt{2n}+1\right) > \frac{2n-1}{3log_2(2n)} - \left(\sqrt{2n}+1\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2n}+1\right)\left(\sqrt{2n}-1\right)}{3log_2(2n)} - \left(\sqrt{2n}+1\right)$$

$$= \left(\sqrt{2n}+1\right)\left(\frac{\left(\sqrt{2n}-1\right)}{3log_2(2n)} - 1\right)$$

Beweis von Erdős

5. Beweis für n ≥ 512

$$P(n) > \left(\sqrt{2n}+1\right)\left(\frac{\left(\sqrt{2n}-1\right)}{3log_2(2n)}-1\right)$$

Es bleibt zu zeigen, dass rechte Seite ab n = 512 = 2^9positiv ist.

Beweis von Erdős

5. Beweis für n ≥ 512

$$P(n) > \left(\sqrt{2n}+1\right)\left(\frac{\left(\sqrt{2n}-1\right)}{3log_2(2n)}-1\right)$$

Es bleibt zu zeigen, dass rechte Seite ab n = 512 = 2^9positiv ist.

Das heißt, wir brauchen zu zeigen:

$$\sqrt{2n}-1 > 3log_2(2n)\ f\text{ür}\ n \geq\ 2^9 \qquad (5)$$

Für n = 29 besagt (5) genau 31 > 30, und ein Vergleich der Ableitungen $\left(\sqrt{x}-1\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ und $(3log_2\mathrm{x})' = \frac{3}{ln2}\frac{1}{x}$ (hier ersetze 2n durch x) zeigt, dass $\sqrt{x}-1$ schneller wächst als $3log_2\mathrm{x}$ wenn $x > \left(\frac{6}{ln2}\right)^2$ $\approx$ 75 ist, und daher sicherluch ab $x \geq 2^{10}$ $also\ n \geq 2^9$ ■

Quelle

Quelle

- **Das Buch der Beweise / Martin Aigner ; Günter M. Ziegler.**

Springer Spektrum, Berlin [u.a.], 4. aufl. edition, 2015.

- **Bertrandsches_Postulat**

https://de.wikipedia.org/wiki/Bertrandsches_Postulat

- **Joseph Bertrand**

https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_Bertrand

- **Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow**

https://de.wikipedia.org/wiki/Pafnuti_Lwowitsch_Tschebyschow

- **Paul Erdős**

https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Erd%C5%91s