

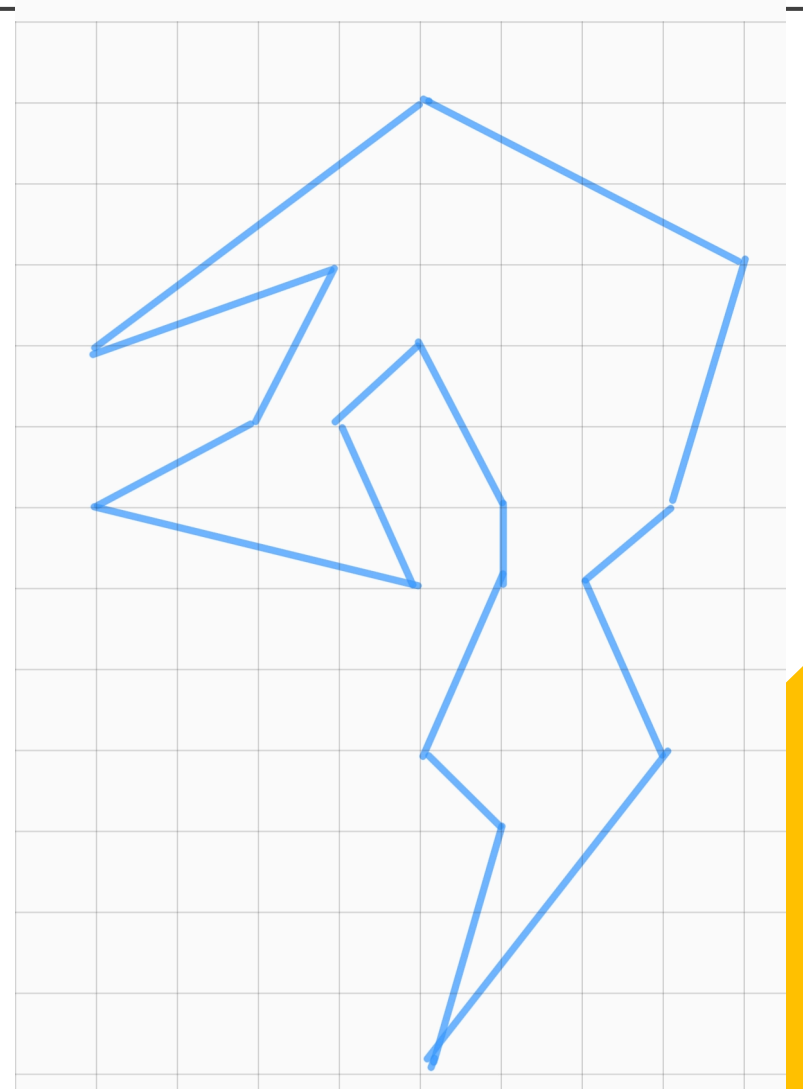
# Der Satz von Pick

Neil Ziolkowski

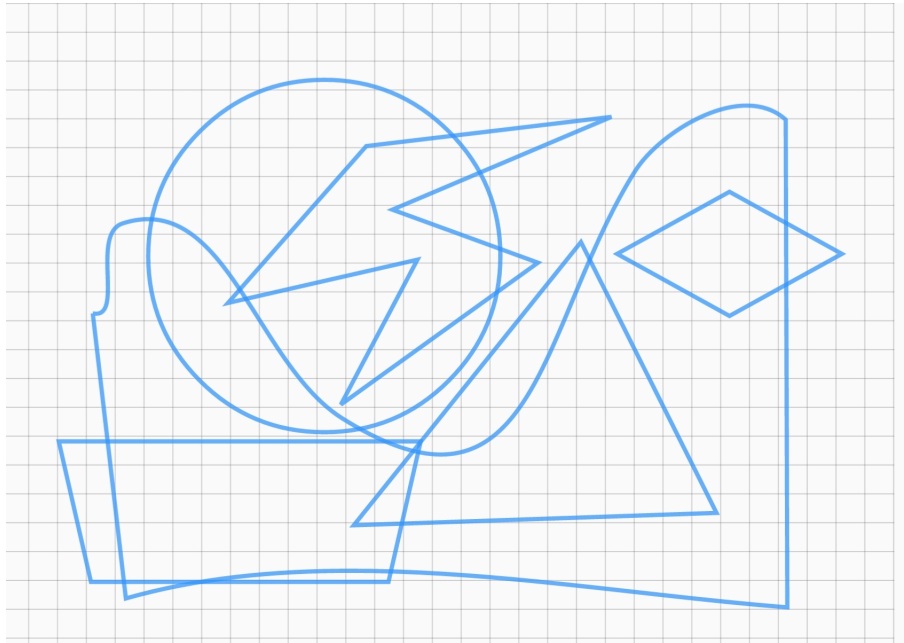
Berlin, 6.12.2021

Institut für Informatik

Humboldt Universität zu Berlin



Eine *andere* Formel für die Berechnung von Flächeninhalten.



Voraussetzungen:

- ein (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon
- das Gitter  $\mathbb{Z}^2$
- Eckpunkte des Polygons sind Gitterpunkte (d.h. ganzzahlig)

Keine Seitenlängen, Winkel oder Integralrechnung!

# Der Satz von Pick

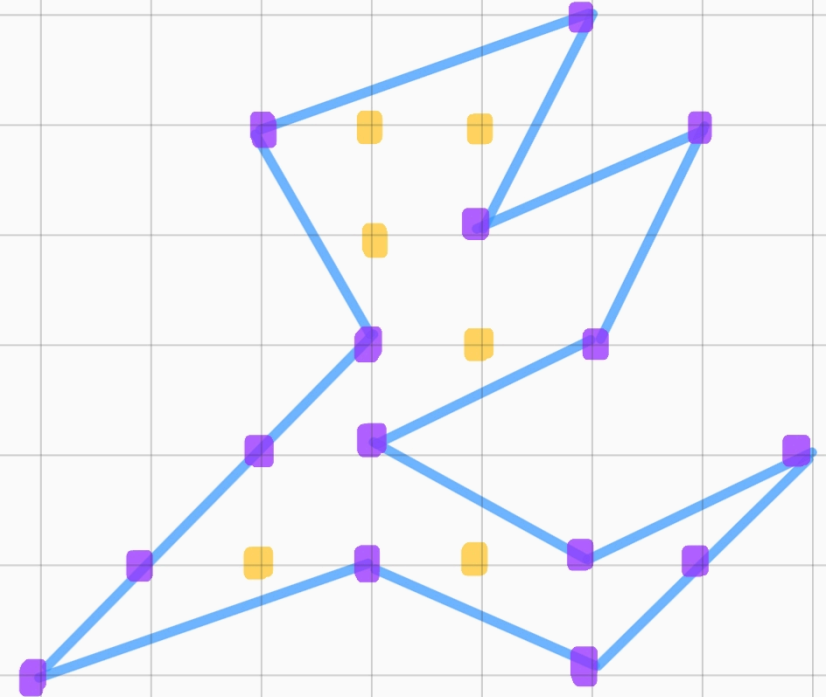
Die Fläche eines Polygons  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  mit ganzzahligen Ecken:

$$A(Q) = n_{in} + \frac{n_{rd}}{2} - 1$$

wobei:

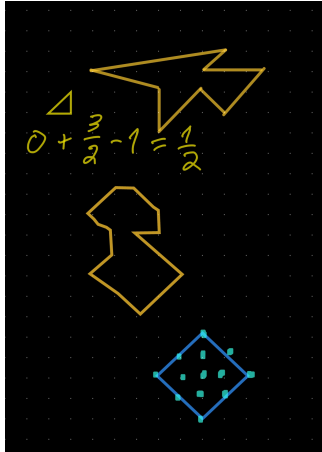
$n_{in}$  := Punkte im Inneren des Polygons

$n_{rd}$  := Punkte am Rand des Polygons

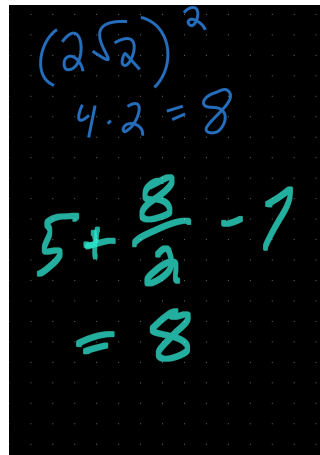


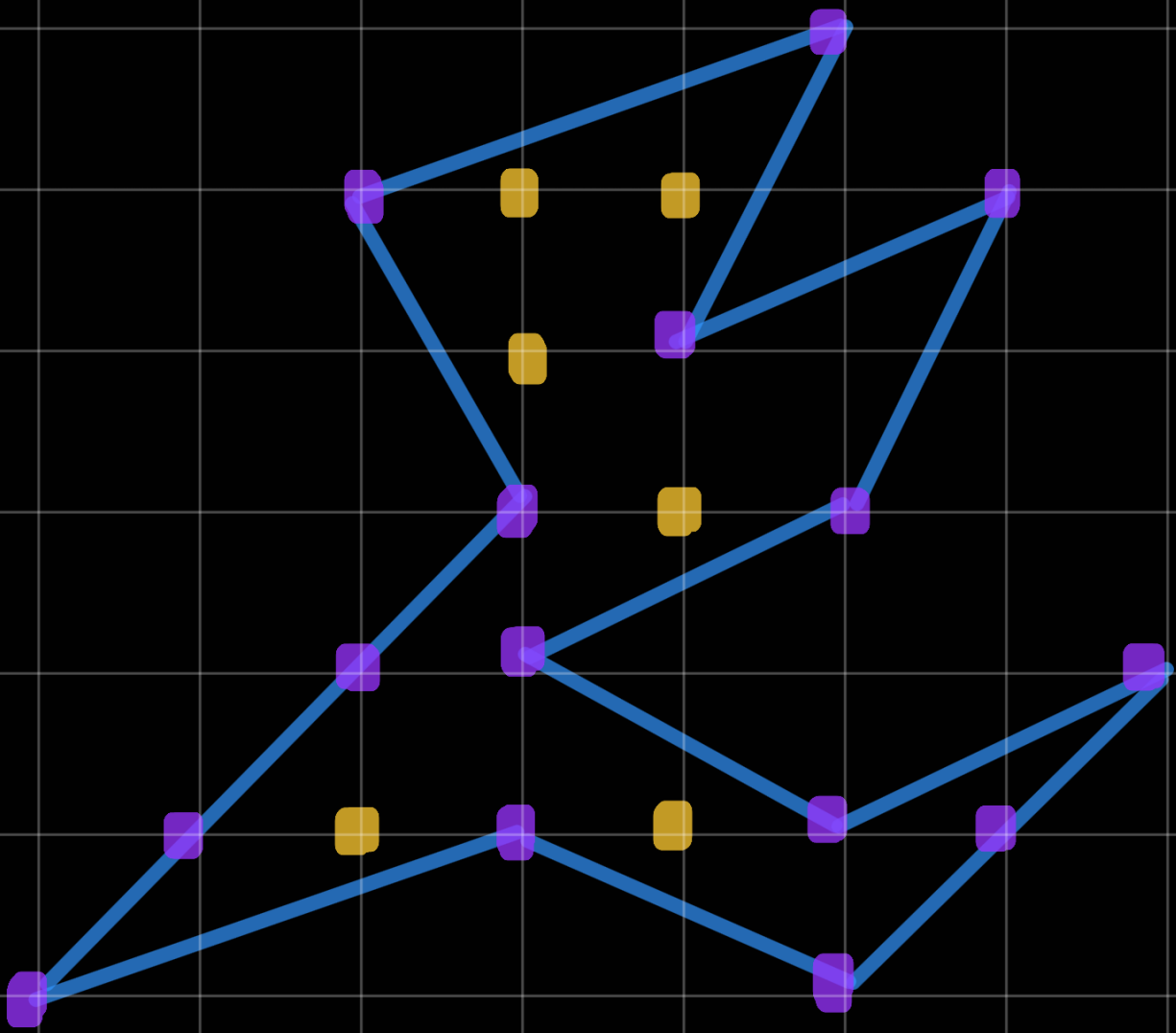
Beispiele:

$$A(Q) = n_{in} + \frac{n_{rd}}{2} - 1$$



- Dreieck? Viereck? Was wissen wir? Was sagt uns der Satz von Pick?

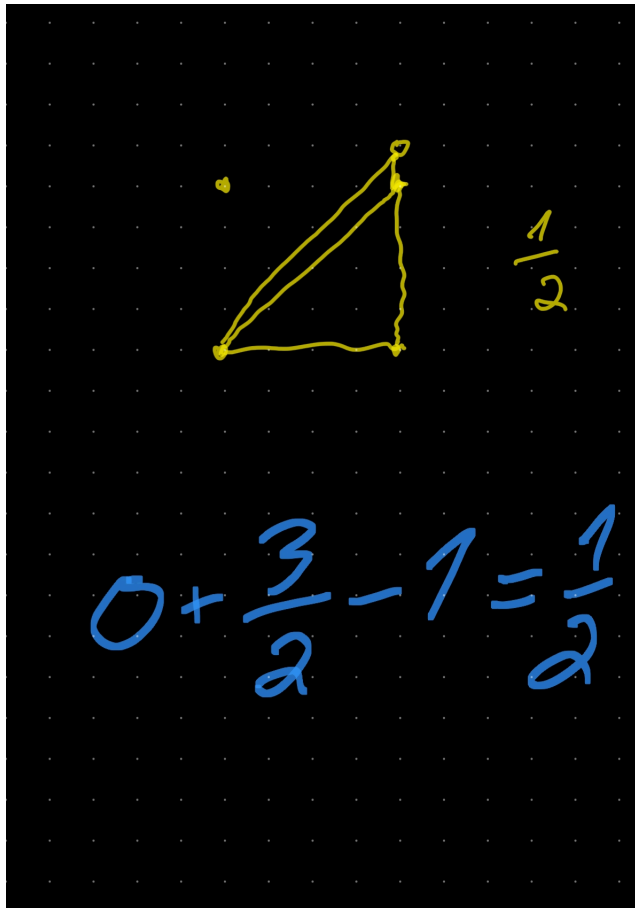

$$(2\sqrt{2})^2$$
$$4 \cdot 2 = 8$$
$$5 + \frac{8}{2} - 1$$
$$= 8$$



$$n_{in} = 6, n_{rd} = 15$$

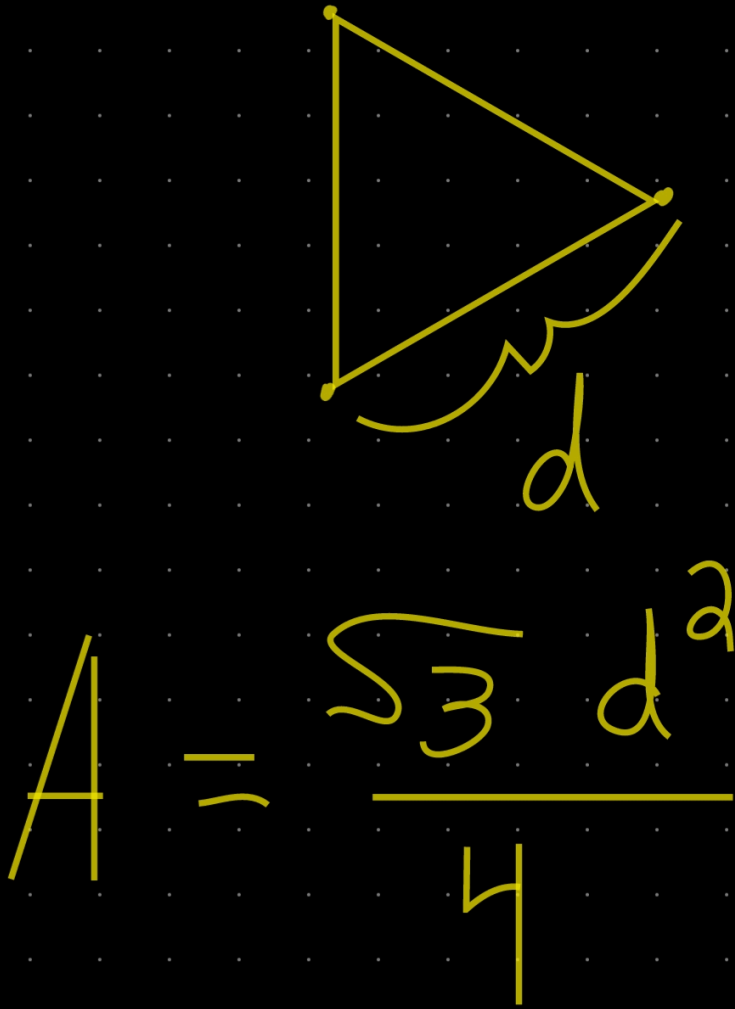
$$6 + \frac{15}{2} = 11\frac{1}{2} + \frac{15}{2}$$

Man erkennt das der Satz von Pick ohne das Gitter gar nichts aussagt. Nehme ein einfaches Dreieck. Die Fläche ist ja  $\frac{1}{2}$ . Verschiebe einen der Eckpunkte. Jetzt ist die Fläche größer, aber die Verbindung zwischen Punktzahl und Fläche ist weg.



Gleichseitiges Dreieck?

Angenommen, dass ein gleichseitiges Dreieck ins Gitter eingezeichnet werden könnte. Dann wäre Seitenlänge  $d$  eine Ganzzahl und dementsprechend  $d^2$  auch. Wir wissen, dass die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks eine irrationale Zahl. Aber der Satz von Pick besagt, dass die Fläche eine rationale Zahl wäre. Widerspruch!



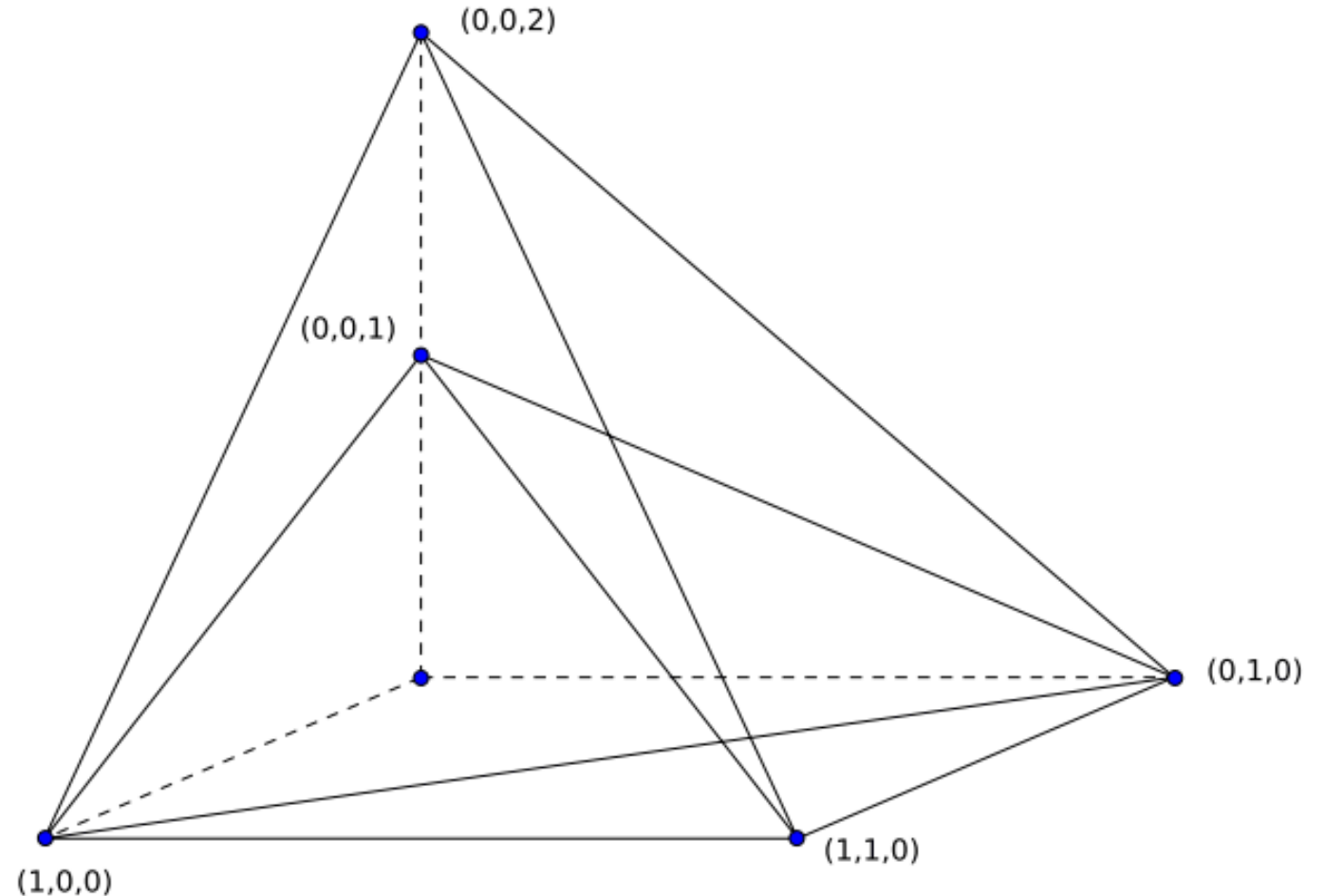
Im Allgemeinen lässt sich der Satz von Pick **nicht** auf drei Dimensionen erweitern.

Betrachte das Reeve-Tetraeder. Das Volumen ist bekanntlich  $r/6$ , wobei  $r$  hier der Gipfelpunkt ist. Man kann das Volumen durch eine Verschiebung des Gipfelpunkts nach oben, z.B. von  $(0,0,1)$  auf  $(0,0,2)$ , vergrößern. Die Punktzahl aber ändert sich nicht.

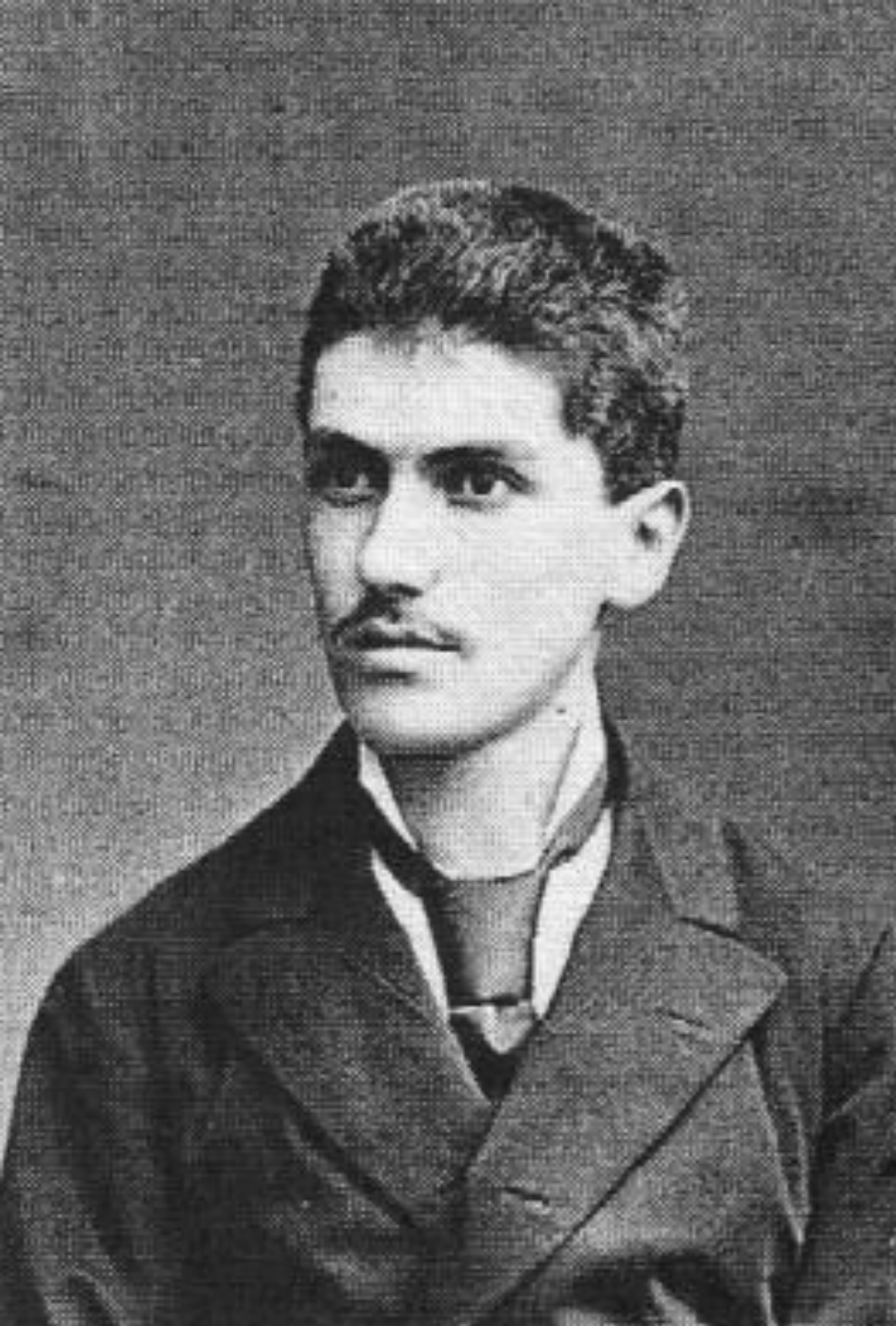
### Reeve-Tetraeder

Eckpunkte:  $(1,0,0)$ ,  $(1,1,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,r)$

Volumen:  $r / 6$







Georg Alexander Pick

\* 1859, Wien

† 1942, KZ Theresienstadt

---

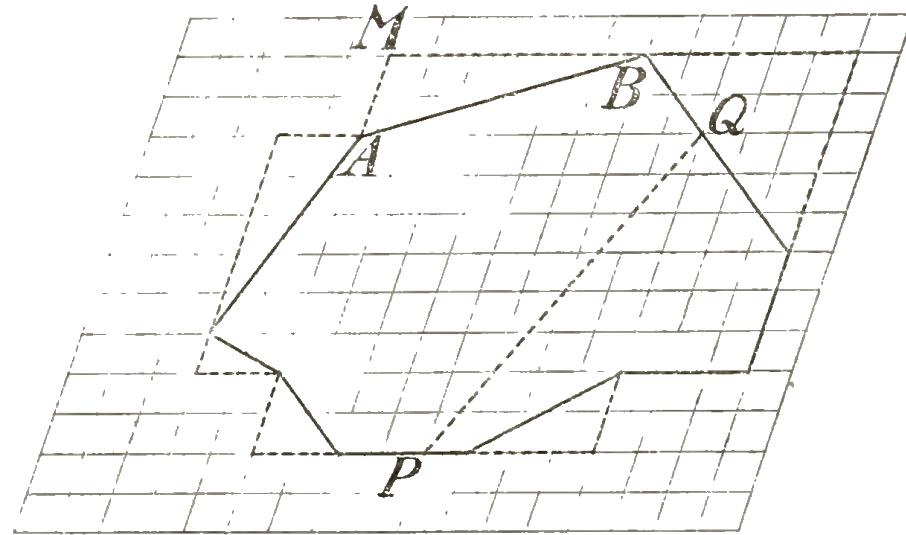
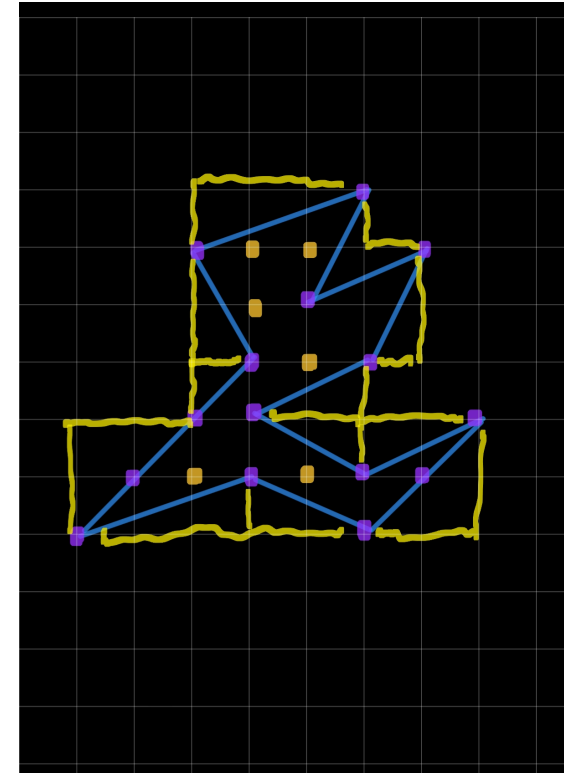


Fig. 2. (Pick, 2021 (1899).)

In dem Aufsatz „Geometrisches zur Zahlenlehre“ (1899) verwendet Pick einen konstruktiven Ansatz.



ergeben, dass die Punktzahl eines aus zwei Bestandtheilen zusammengesetzten Polygons gleich ist der Summe der Punktzahlen der Bestandtheile. Wiederholte Anwendung dieses Resultats zeigt die Richtigkeit desselben auch für beliebig viele Bestandtheile.

Für eine einzelne Masche ist

$$i = 0, u = 4$$

also die Punktzahl gleich Zwei, und gibt daher direct den Flächeninhalt der Masche an. Für jede aus solchen Maschen zusammensetzbare Polygonfigur, das heisst für jede ausschliesslich von Hauptgitterstrahlen begrenzte Figur, ist daher nach dem obigen Zusammensetzungssatze die Punktzahl gleich dem Flächeninhalt. Insbesondere gilt dies von den Parallelogrammen aus Hauptgitterstrahlen. Zerlegt man ein solches Parallelogramm durch eine Diagonale, so entstehen zwei Dreiecke, welche in Folge der Sätze I und II sammt den zu ihnen gehörigen Gitterpunkten congruent sind. Also ist die Punktzahl eines jeden von ihnen halb so gross als jene des Parallelogramms, und daher wieder gleich ihrem Inhalt.

Ein beliebiges Gitterpolygon nun kann man dadurch zu einer ausschliesslich von Hauptgitterstrahlen begrenzten Figur ergänzen, dass man über allen Seiten derselben, die nicht schon selbst Hauptgitterstrahlen sind, Dreiecke errichtet, deren beide

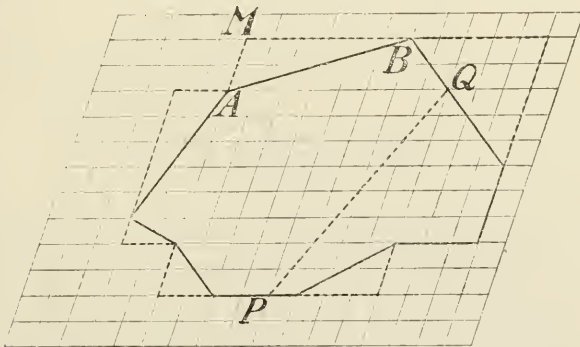


Fig. 2.

anderen Seiten Hauptgitterstrahlen sind. (Fig. 2.  $ABM$ .) Für diese ergänzenden Dreiecke ebensowohl als für die entstandene

# Geometrisches zur Zahlenlehre.<sup>1)</sup>

Von

GEORG PICK.

Seit Gauss sind parallelogrammatische Gitter in der Ebene und entsprechende Raumfiguren vielfach zur Veranschaulichung und als heuristisches Mittel in der Zahlenlehre verwendet worden. Im Vergleich mit allen diesen Anwendungen verfolgen die nachfolgenden Zeilen ein viel bescheideneres Ziel: es wird der Versuch gemacht, die Elemente der Zahlentheorie von vorn herein auf geometrische Basis zu stellen. Dazu dient eine trotz ihrer Einfachheit bisher, wie es scheint, unbemerkt gebliebene Flächenformel für Polygone, welche in ein Gitter eingezeichnet sind.

## §. I. Gitter und Gitterpolygone.

Zwei Systeme aequidistanter Parallelen in der Ebene bilden ein Gitter (Fig. 1); die Schnittpunkte derselben heissen Gitterpunkte, die Parallelen selbst sollen Hauptgitterstrahlen genannt werden. Offenbar gelten folgende zwei Congruenzsätze:

I. Das Gitter (insbesondere als Inbegriff seiner Punkte) kommt durch Parallelverschiebung mit sich selbst zur Deckung, sobald irgend ein Gitterpunkt auf irgend einen anderen solchen fällt.

II. Das Gitter kommt mit sich selbst zur Deckung durch Drehung um  $180^\circ$  um einen seiner Punkte.

---

<sup>1)</sup> Bearbeitung eines in der deutschen mathem. Gesellschaft zu Prag gehaltenen Vortrages.

Wir arbeiten den BUCH-Beweis nach und wenden uns jetzt der linearen Algebra zu, um die Eigenschaften des Gitters, die Pick als Voraussetzung für seinen Beweis bezeichnet, anzuschauen.

# 1. Schritt

- Definiere *elementar* für ein Polygon  $P$
- ein Polygon  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  ist *elementar* wenn seine Eckpunkte ganzzahlig sind, es aber keine weitere Gitterpunkte enthält
  - d.h. die Eckpunkte von  $P$  sind Gitterpunkte
- ein elementares Dreieck

$$A(\Delta) = \frac{1}{2}.$$

## 2. Schritt

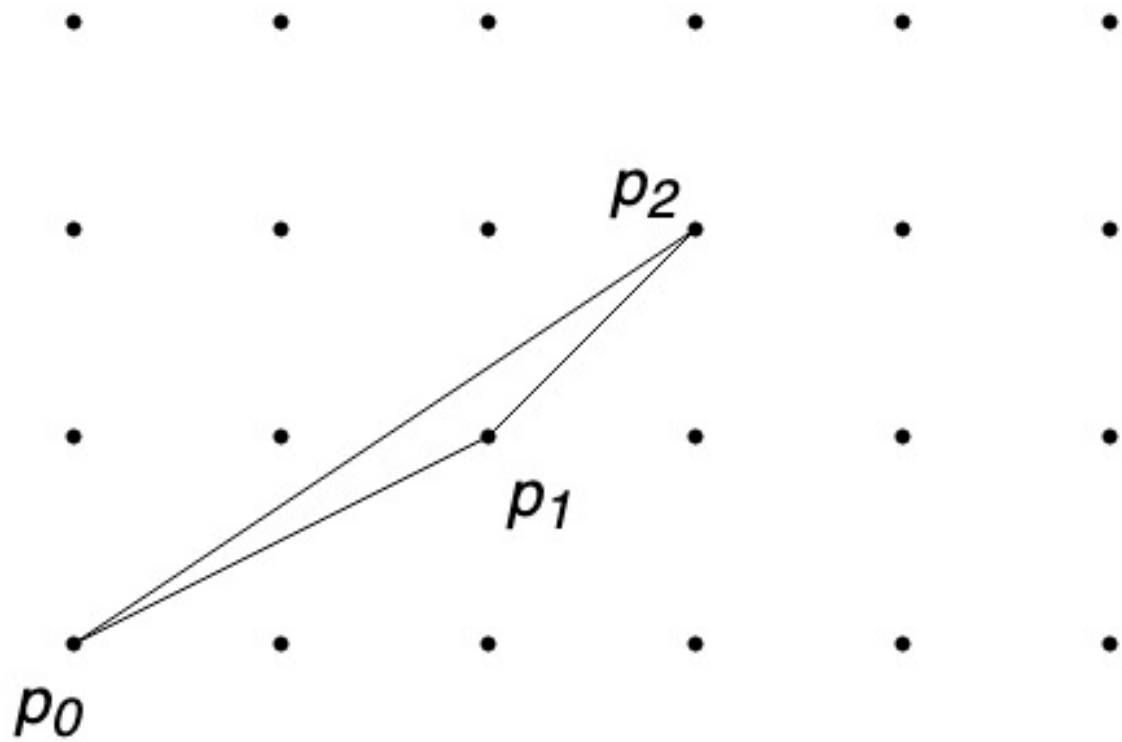
- die Eulersche Polyederformel:

Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen  $G$  mit  $n$  Ecken,  $e$  Kanten und  $f$  Gebieten gilt

$$n + f - e = 2.$$

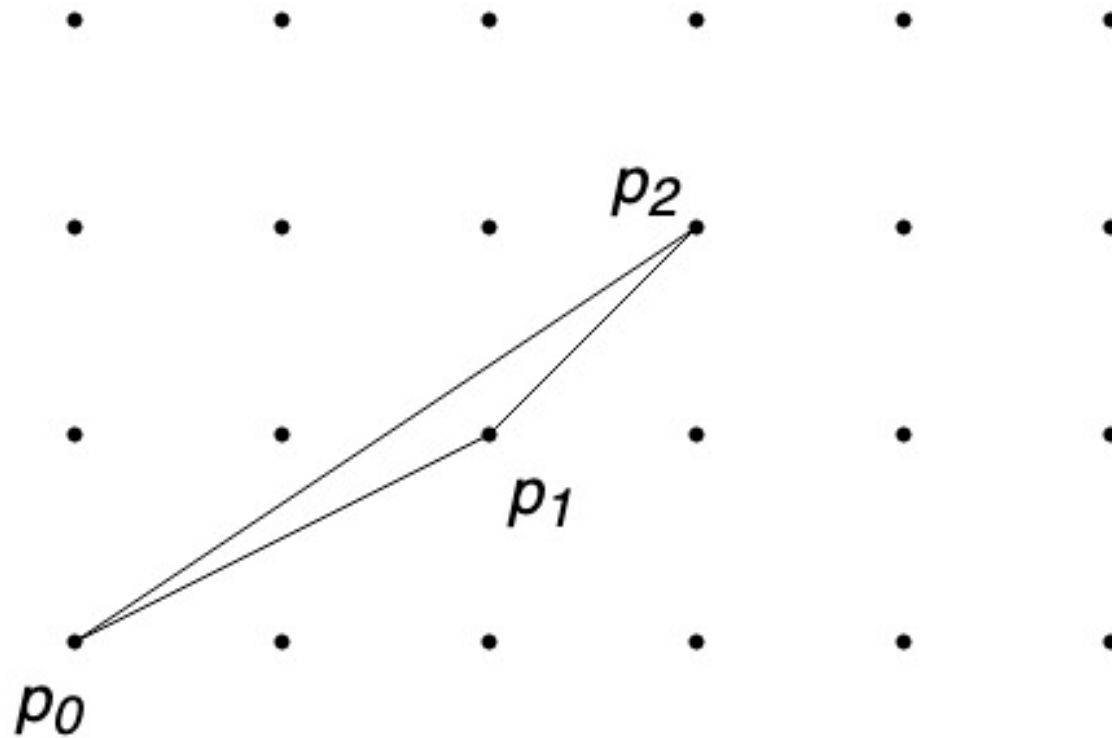
Lemma:

Jedes elementare Dreieck  $\Delta = \text{conv}\{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$   
hat die Fläche  $A(\Delta) = \frac{1}{2}$ .

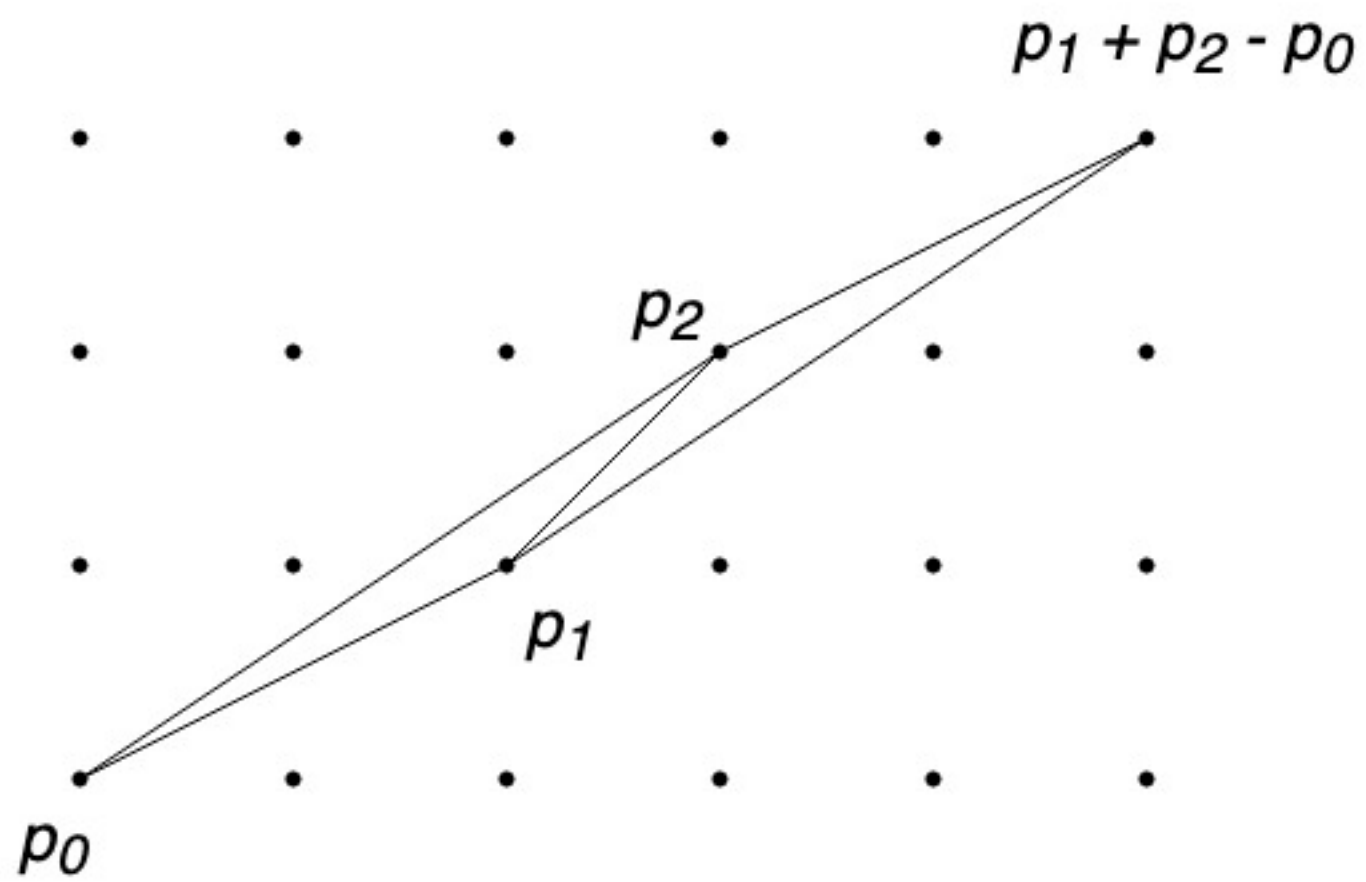


# Beweis

- Spiegelung im Mittelpunkt der Strecke von  $p_1$  nach  $p_2$







# Beweis

- Spiegelung im Mittelpunkt der Strecke von  $p_1$  nach  $p_2$
- D.h. das Parallelogramm  $P$  mit Ecken  $p_0, p_1, p_2, p_1 + p_2 - p_0$  und das Gitter  $\mathbb{Z}^2$  sind symmetrisch bzgl. der Abbildung:

$$\sigma: v \mapsto p_1 + p_2 - v$$

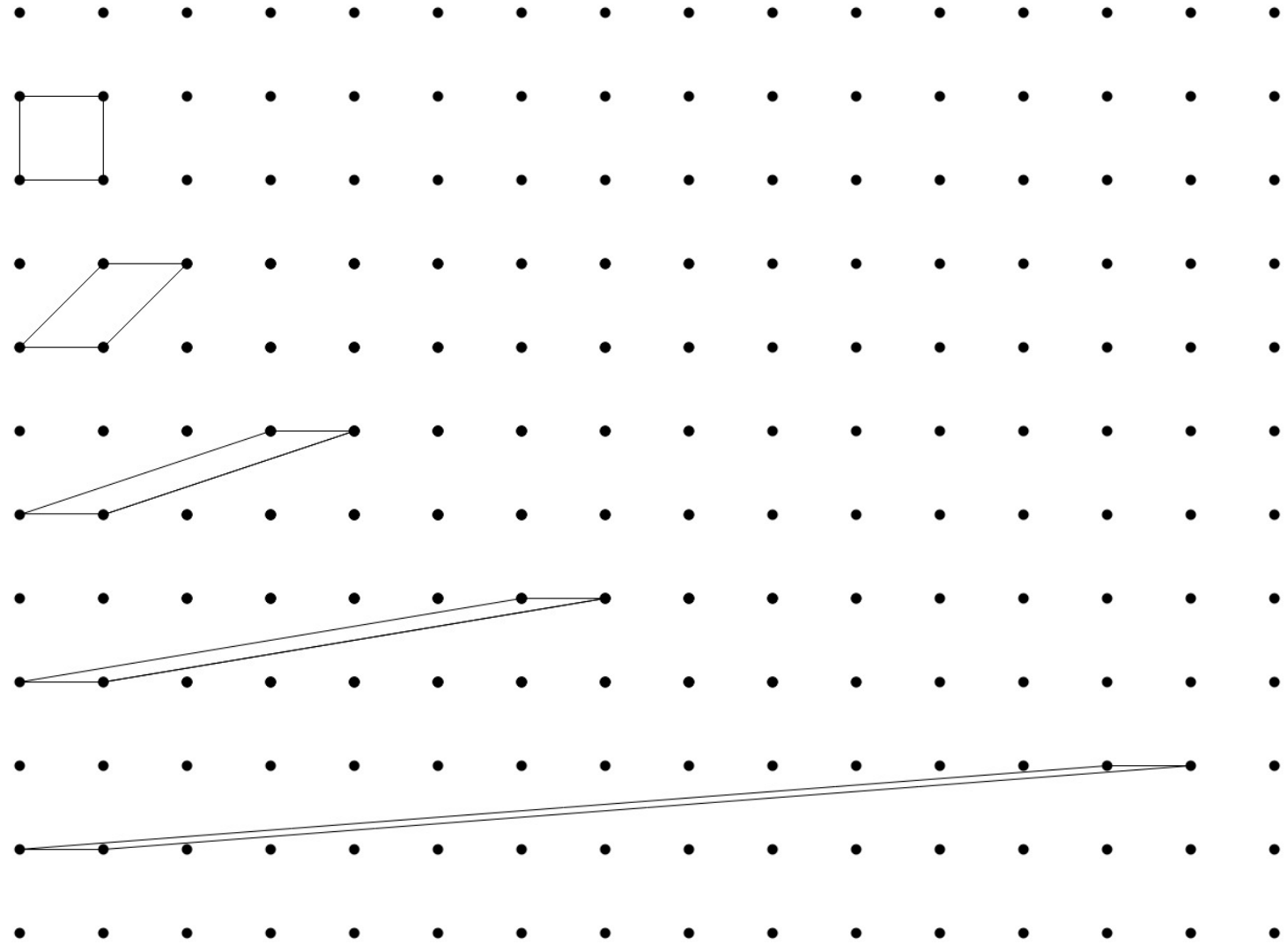
- $P = \Delta \cup \sigma(\Delta)$  ist *elementar*

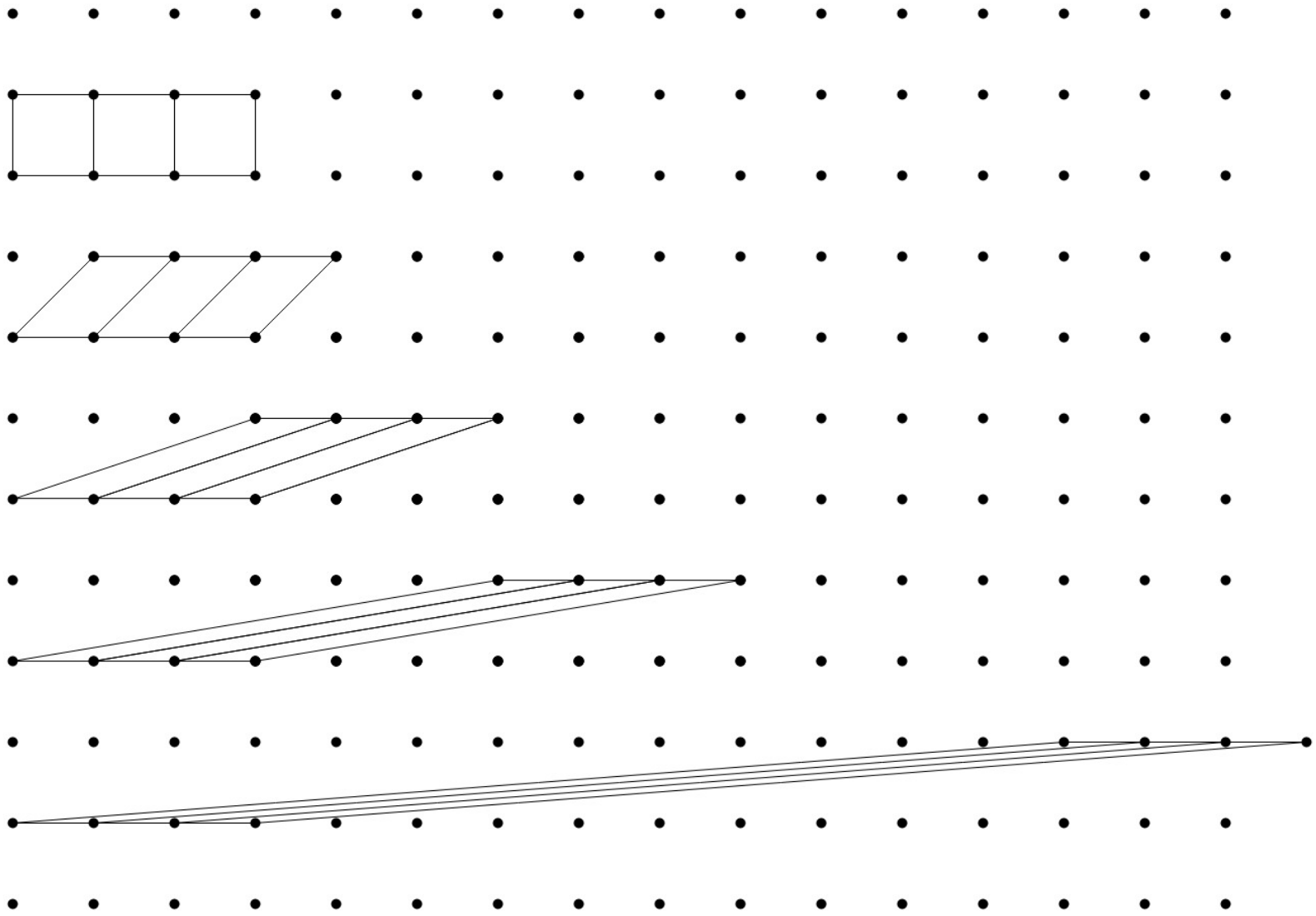
# Beweis

- die ganzzahligen Translate von  $P$  pflastern die Ebene
- $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0\}$  ist eine Basis vom Gitter  $\mathbb{Z}^2$ .

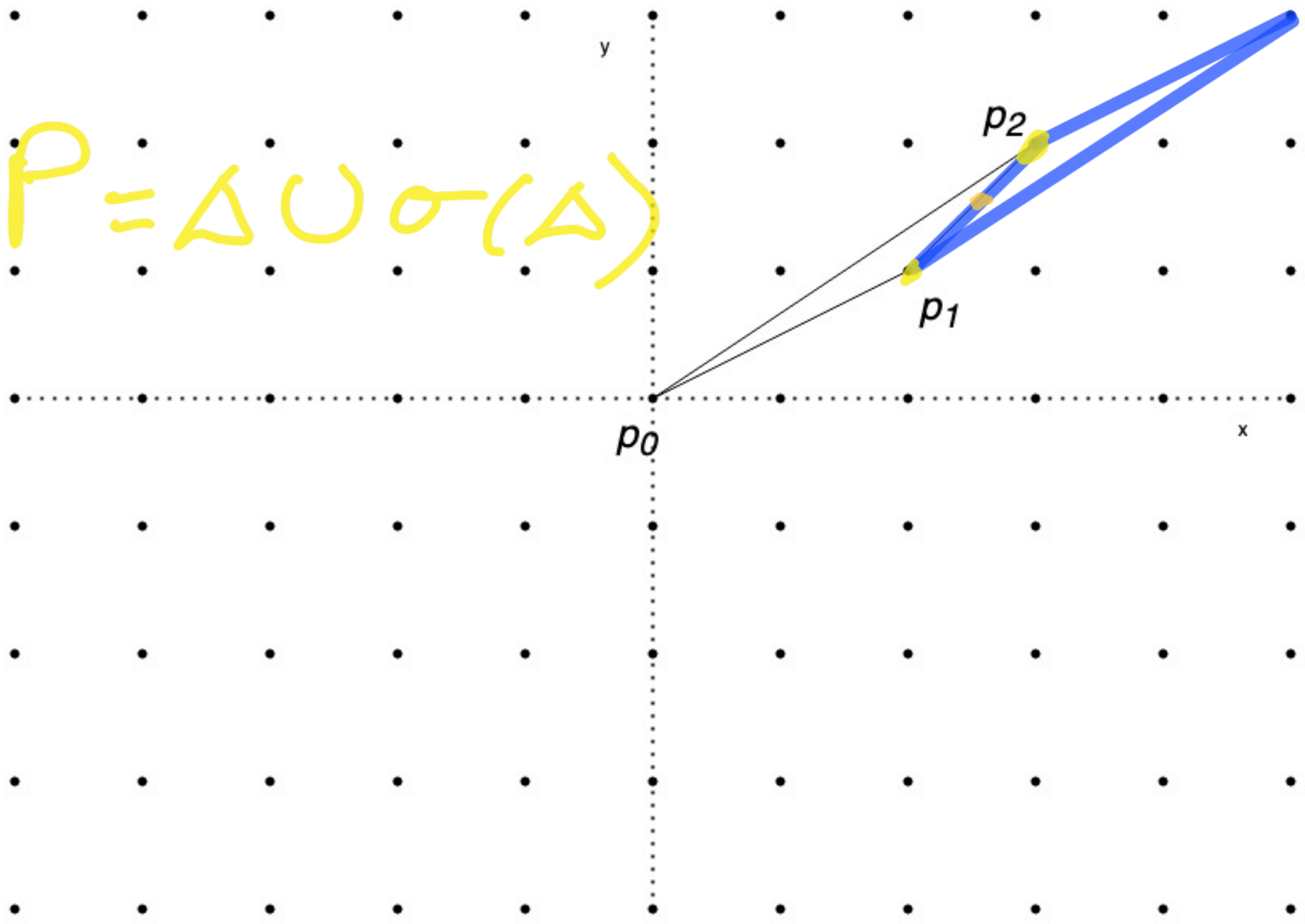
# Gitterbasen

(die geometrische  
Anschauung)





$$P = \Delta U \sigma(\Delta)$$



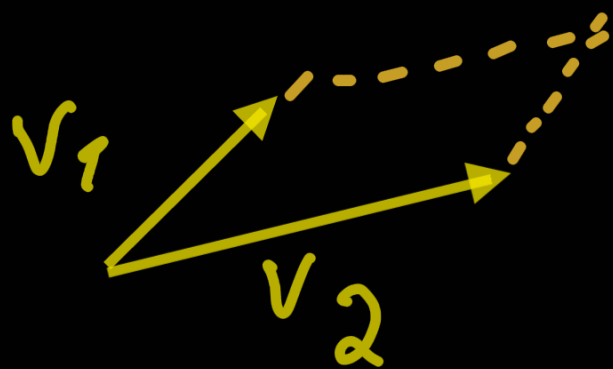
# Gitterbasen

$v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^2$  linear unabhängig

$$\mathbb{Z}^2 = \left\{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\{v_1, v_2\}$  ist eine Basis des  $\mathbb{Z}^2$

Seien  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$



$$A(v_1, v_2) = |\det(v_1, v_2)|$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|$$
$$ad - cb$$



Sei  $w_1 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$

eine andere Basis des  $\mathbb{Z}^2$

Da  $\{v_1, v_2\}$  und  $\{w_1, w_2\}$

Gitterbasen sind,

gibt es eine

umkehrbare

ganzzahlige Matrix

$Q$  mit

$$\begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} Q$$

Dann gilt:

$$Q Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinanten  
sind ganzzahlig,  
also gilt:

$$|\det Q| = 1$$

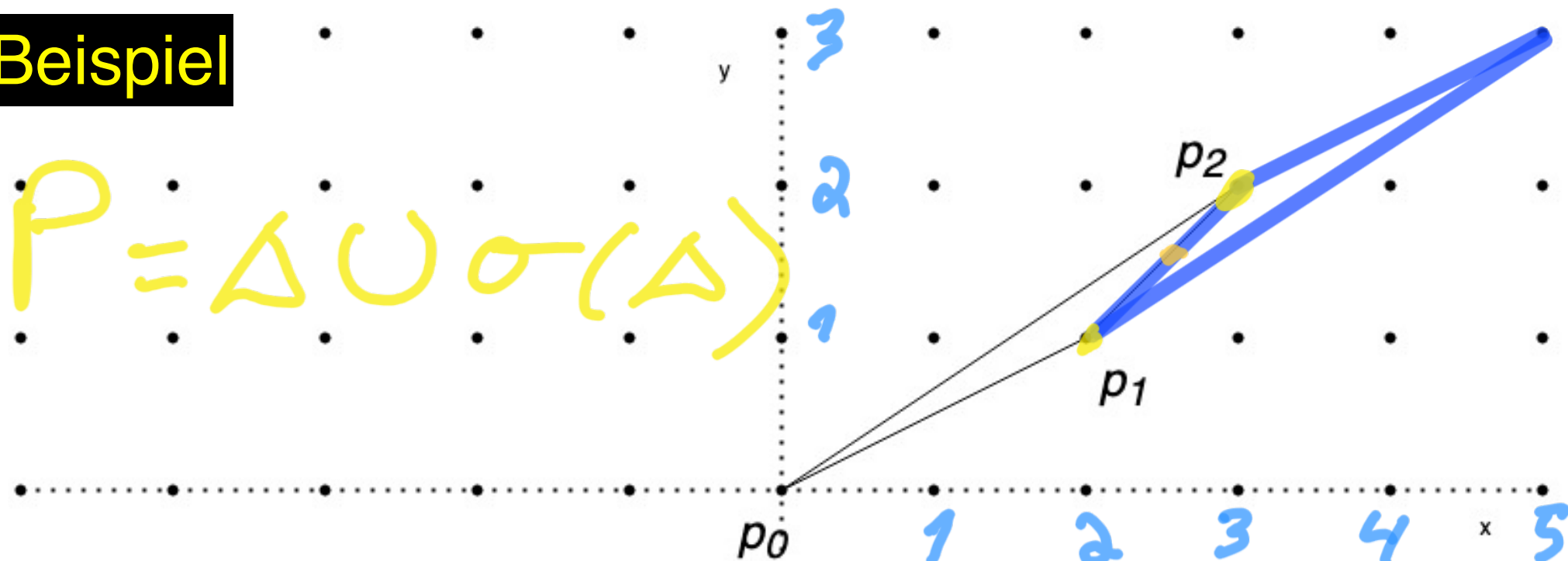
$$\underline{|\det \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}|} = \underline{|\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}|}$$

Also haben  
alle Basisparallelogramme  
die Fläche

$$A \begin{pmatrix} (1,0) \\ (0,1) \end{pmatrix} = 1$$

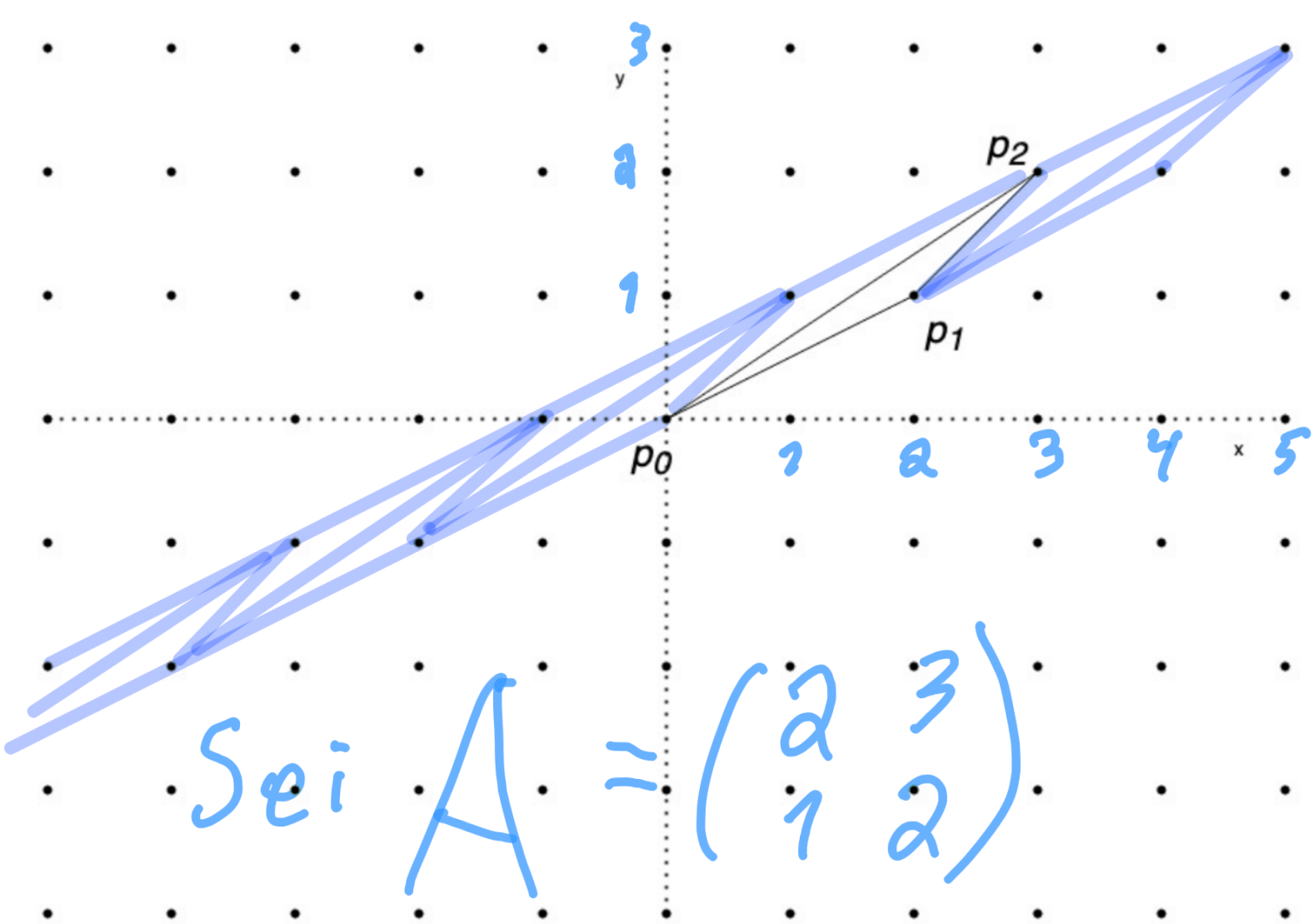
# Beispiel

$$P = \Delta \cup \sigma(\Delta)$$



$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$$



Sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

wir suchen die Inverse

zu  $A$ .  
schreibe

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Mittels Elimination

$$Z_2 \rightarrow -2Z_2 + Z_1$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Rückwärtseinsetzen

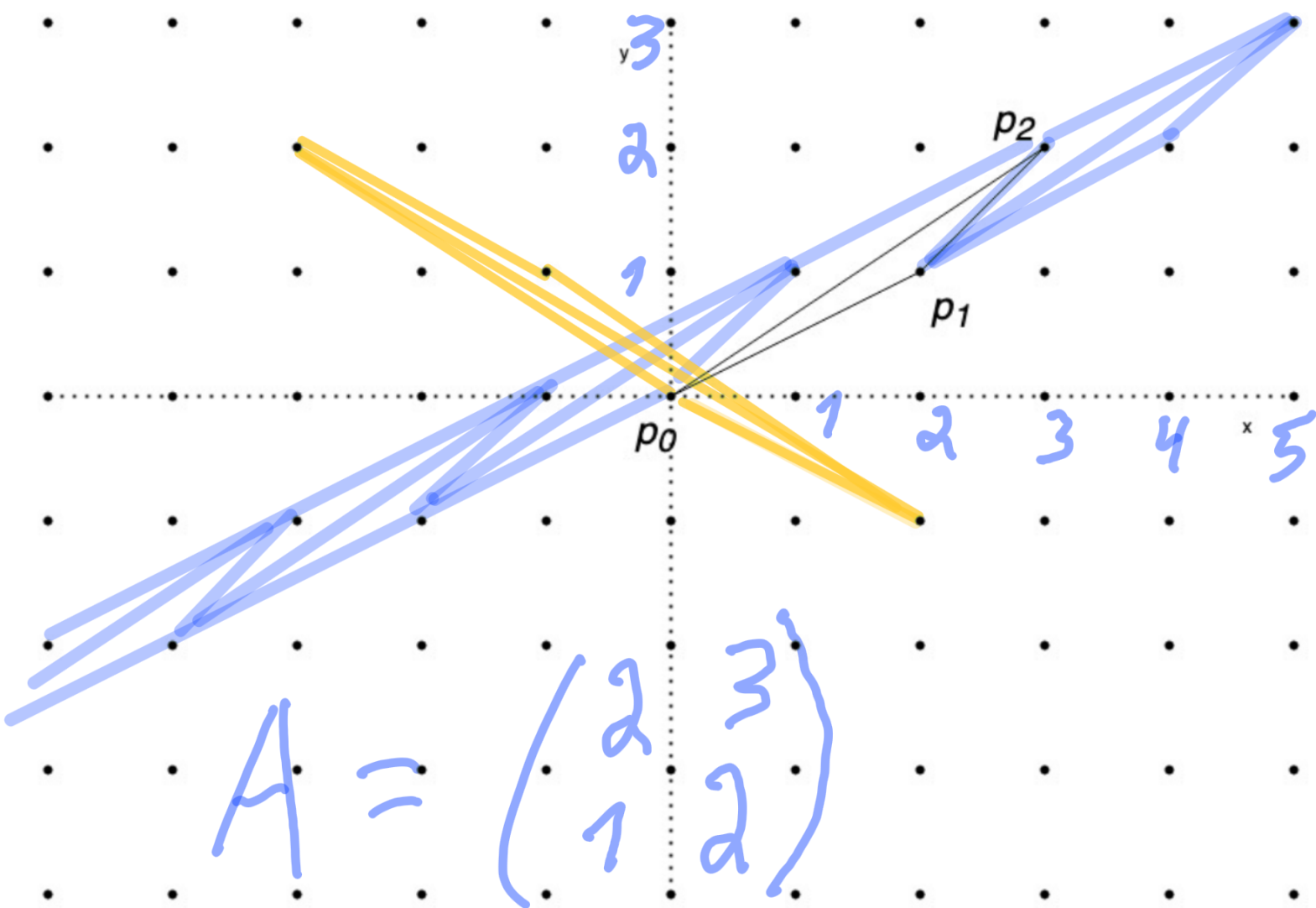
$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

und

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Dann  
ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

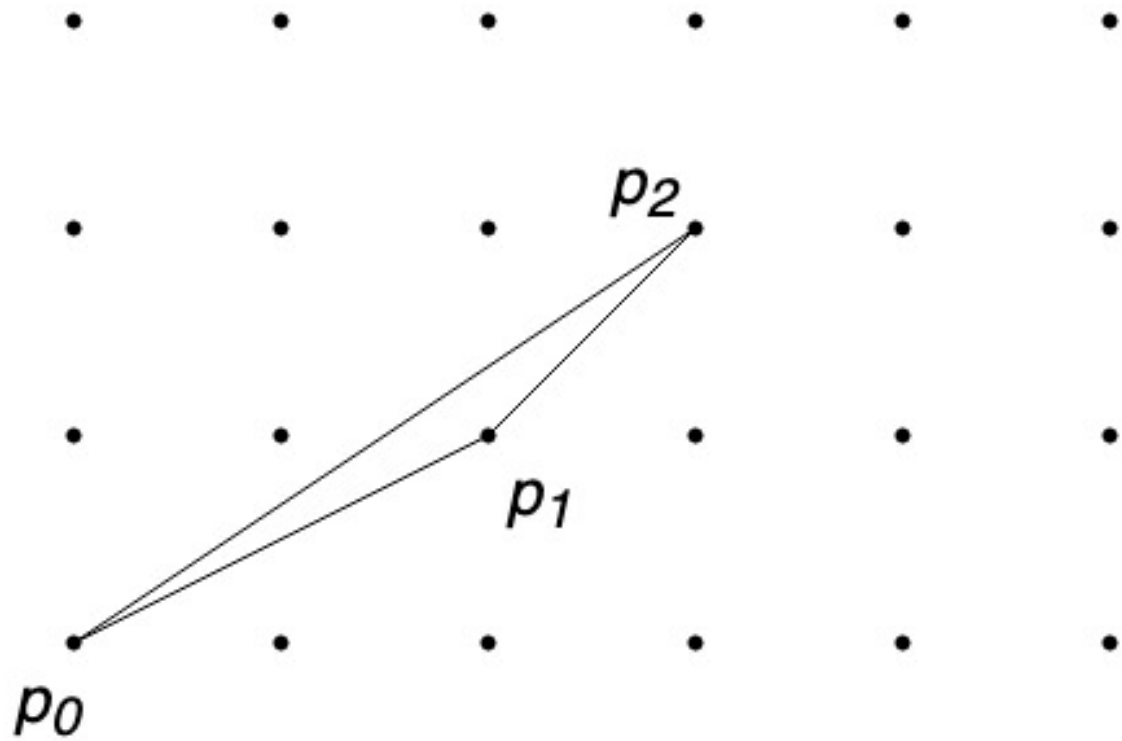


$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\det A| = |\det A^{-1}| = 1$$

Lemma:

Jedes elementare Dreieck  $\Delta = \text{conv}\{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$   
hat die Fläche  $A(\Delta) = \frac{1}{2}$ .

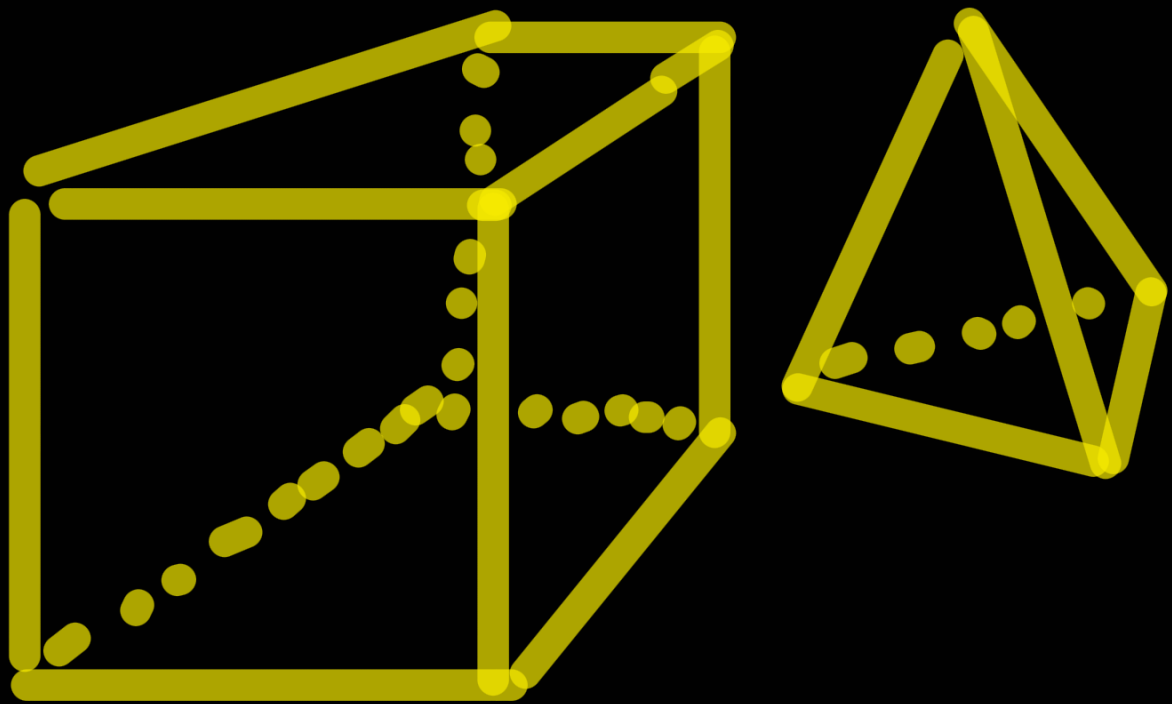




# die Eulersche Polyederformel:

- Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen  $G$  mit  $n$  Ecken,  $e$  Kanten und  $f$  Gebieten gilt

$$n + f - e = 2.$$



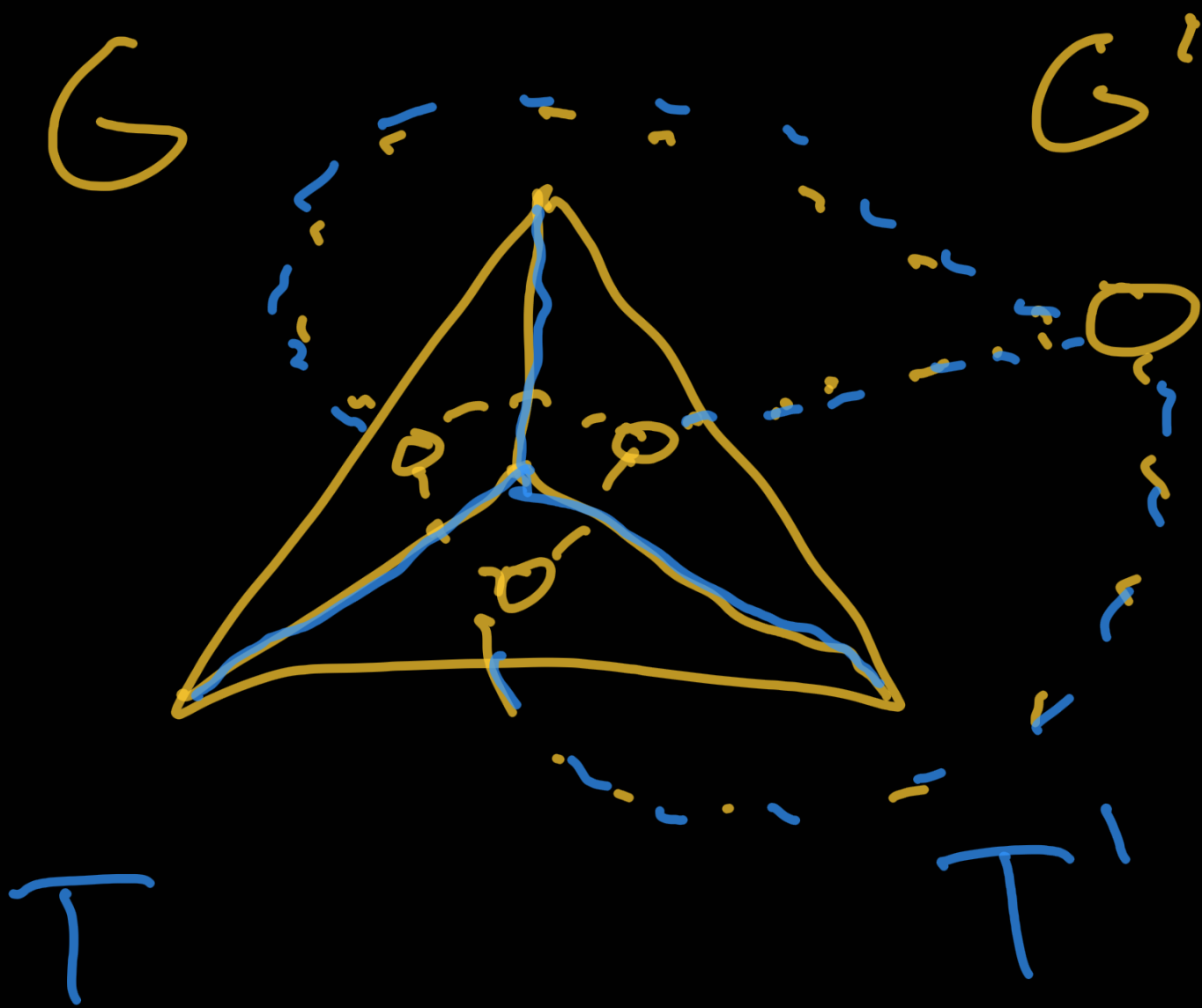
$$n + f - e = 2$$

$$8 + 6 - 12 = 2$$

---

$$4 + 4 - 6 = 2$$

---



$$f = e_T + 1$$

$$n = e_T + 1$$

$$f + n = e + 2$$

$$n + f - e = 2$$

Zusammenhang?

• einfaches  
Dreieck

$$A(\Delta) = \frac{7}{2}$$

• planarer Graph

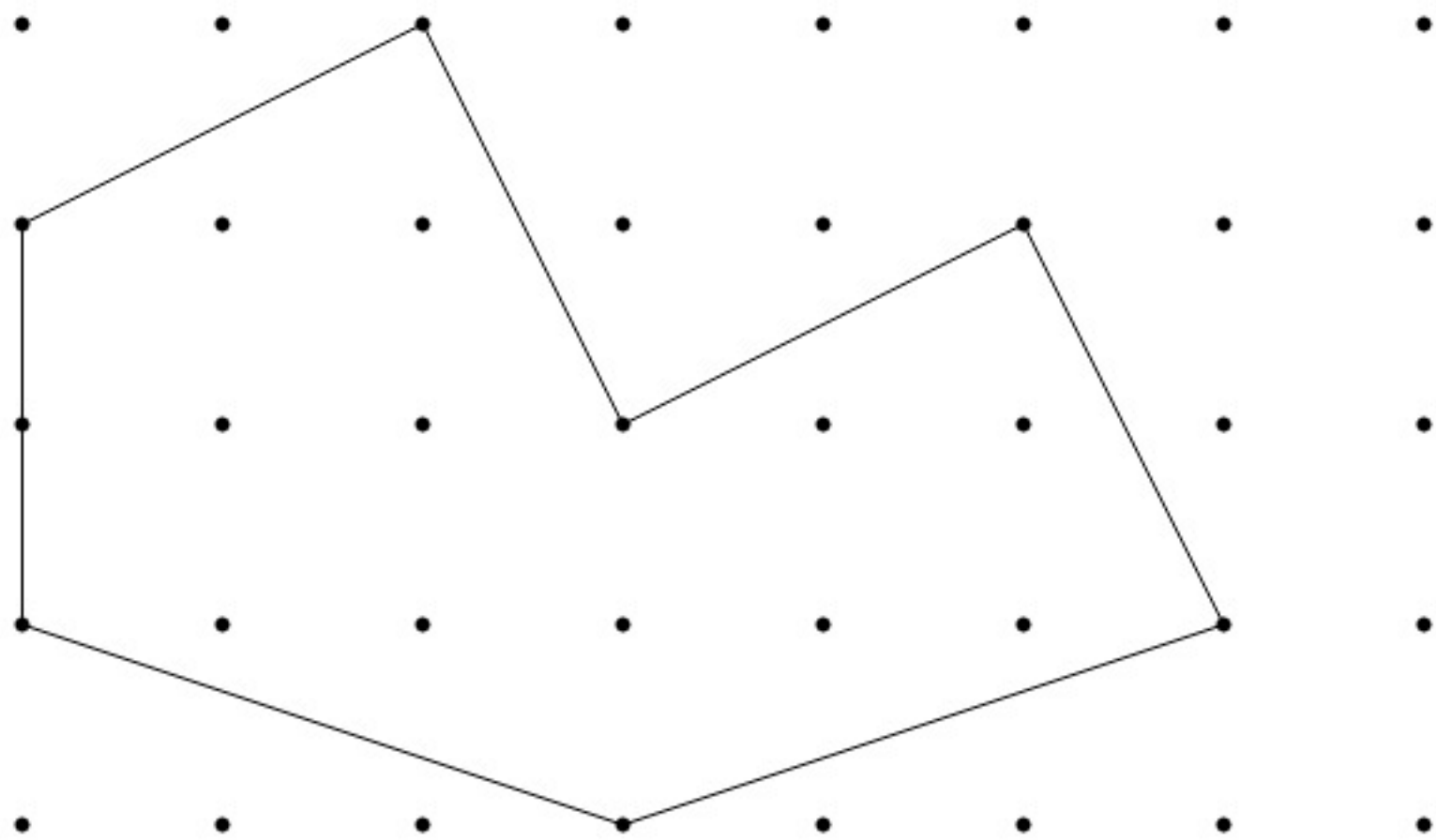
• Gitterpunkte

# Der Satz von Pick

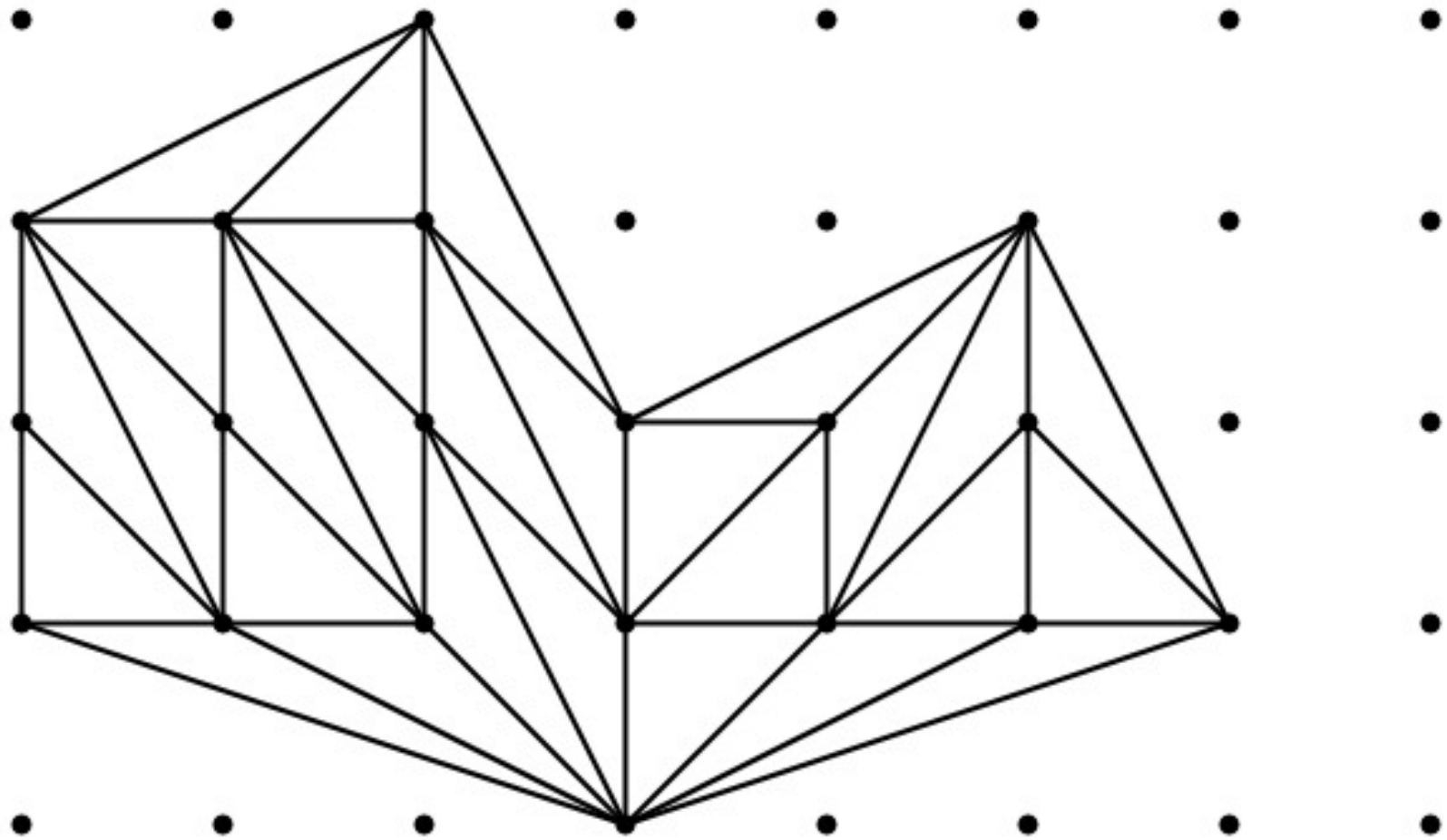
$$A(Q) = n_{in} + \frac{n_{rd}}{2} - 1$$

Beweis. 
$$A(Q) = n_{in} + \frac{n_{rd}}{2} - 1$$

- Interpretiere die Triangulierung als einen ebenen Graphen.
- D.h. es gibt  $(f - 1)$  Dreiecke der Fläche  $\frac{1}{2}$ .
  - $3(f - 1) = 2e_{in} + e_{rd}$
  - jede der  $e_{in}$  inneren Kanten begrenzt zwei Dreiecke
  - jede der  $e_{rd}$  Randkanten begrenzt nur ein einzelnes Dreieck
- Jetzt umformen



$$n_{in} = 11, n_{rd} = 8, \text{ also } A = 14$$





$$3(f-1) = 2e_{in} + e_{rd}$$

$$3(f-1) = 2(e - e_{rd}) + e_{rd} \quad e = e_{in} + e_{rd}$$

$$3(f-1) = 2e - 2e_{rd} + e_{rd}$$

$$3(f-1) = 2e - e_{rd}$$

$$3f - 3 = 2e - e_{rd}$$

$$f + 2f - 3 = 2e - e_{rd}$$

$$f = 2e - 2f - e_{rd} + 3 \quad n + f - e = 2$$

$$f = 2(e - f) - e_{rd} + 3 \quad n - 2 = e - f$$

$$f \stackrel{\text{Euler}}{=} 2(n-2) - e_{rd} + 3$$

$$f = 2(n-2) - n_{rd} + 3$$

$$f = 2((n_{in} + n_{rd}) - 2) - n_{rd} + 3$$

$$f = 2n_{in} + 2n_{rd} - 4 - n_{rd} + 3$$

$$f = 2n_{in} + n_{rd} - 1$$

$$f - 1 = 2n_{in} + n_{rd} - 1 - 1$$

$$f - 1 = 2n_{in} + n_{rd} - 2$$

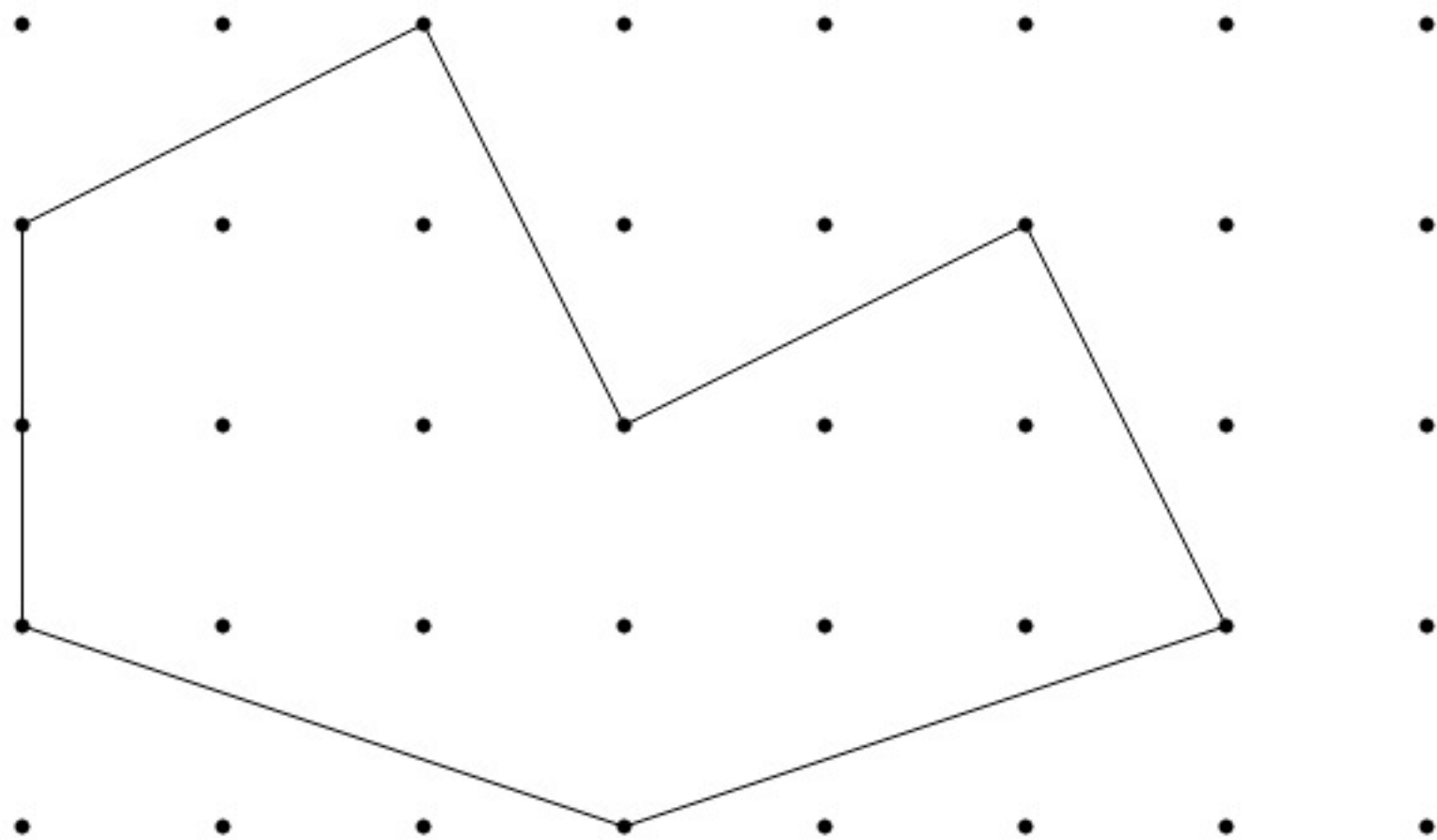
$$\frac{1}{2}(f-1) = n_{in} + \frac{1}{2}n_{rd} - 1$$

$$A(Q) = n_{in} + \frac{1}{2}n_{rd} - 1$$

$f-7$   
die Anzahl  
der elementaren  
Dreiecke



□



$$n_{in} = 11, n_{rd} = 8, \text{ also } A = 14$$

# Farey-Folge

$$F_1 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right)$$

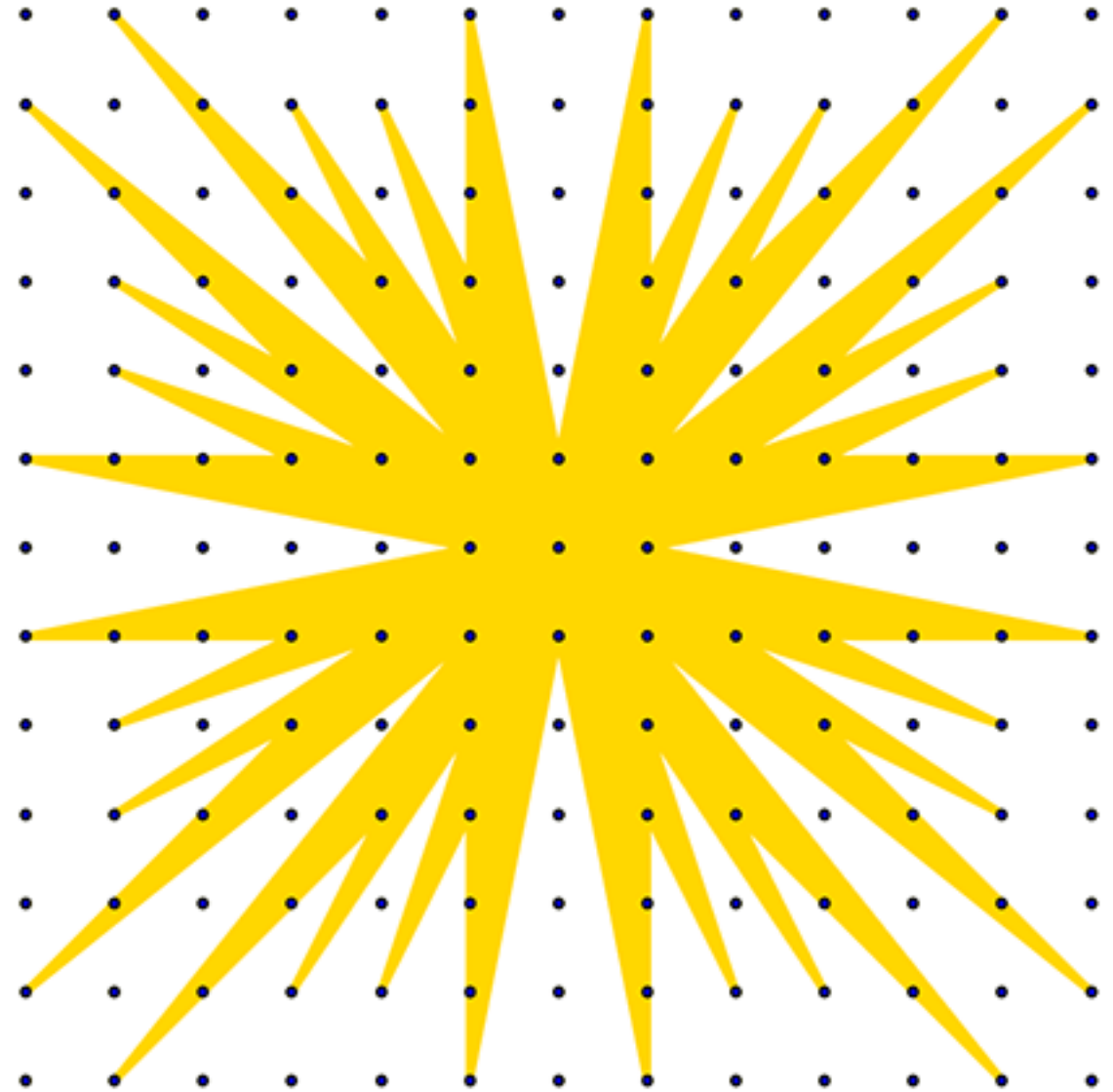
$$F_2 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right)$$

$$F_3 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

$$F_4 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right)$$

$$F_5 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right)$$

$$F_6 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right)$$



## Der Satz von Pick und die Farey-Folge

Was für einen Zusammenhang gibt es zwischen dem Satz von Pick

$$A = n_{in} + \frac{n_{rd}}{2} - 1$$

und der Farey-Folge?

Eine Farey-Folge  $N$ -ter Ordnung  $F_N$  ist eine geordnete Menge von gekürzten Brüchen zwischen 0 und 1, deren Nenner kleiner gleich  $N$  ist.

$$F_N := \left\{ \frac{a}{b} \mid 0 \leq a \leq b \leq N, \ a \in \mathbb{Z}, \ b, N \in \mathbb{N}, \ \text{ggT}(a, b) = 1 \right\}$$

z.B.

- $F_1 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right)$
- $F_2 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right)$
- $F_3 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right)$
- $F_4 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right)$
- $F_5 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right)$
- $F_6 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right)$

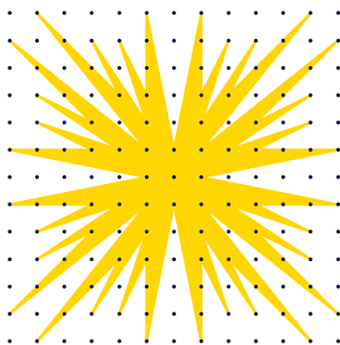


Abbildung 1: Farey sunburst (IMA, 2021)

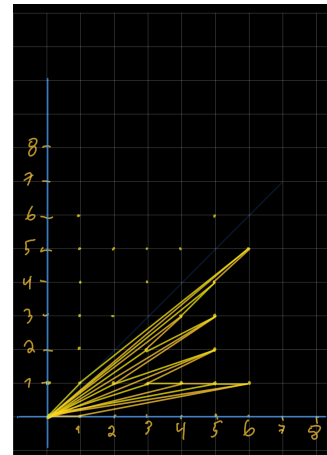
Die geometrische Darstellung der Folge 6-ter Ordnung wird gezeichnet, indem ein Radiusvektor, der vom Koordinatenursprung zu  $(6, 0)$  zeigt,  $2\pi$  rad gedreht wird. Für die Figur werden nur die Gitterpunkte mit  $x, y \in [-6, 6]$  betrachtet. Die Punkte, durch die der Radiusvektor geht, werden nacheinander verbunden und dadurch entsteht die "Farey sunburst". Wenn der Radiusvektor durch mehrere Punkte gleichzeitig geht, wird der dem Ursprung am nächsten Punkt genommen, also einem gekürzten Bruch

analog. Die gewählten Punkte (Richtungsvektoren) mit Winkel  $\in [0, \frac{\pi}{4}]$  entsprechen den Termen der Farey-

Folge 6-ter Ordnung, wobei der Punkt  $(x, y)$  dem Bruch  $\frac{y}{x}$  entspricht.

Zwar lässt sich die Fläche mit Hilfe des Satzes von Pick berechnen,  $n_{in} = 1$ ,  $n_{rd} = 96$ , also  $1 + \frac{96}{2} - 1 = 48$ , aber das ist hier eigentlich Nebensache. Viel wichtiger ist, dass zwei benachbarte Terme in der Folge  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  folgende Gleichung ergeben,  $bc - ad = 1$ . Das heißt, wenn die Terme als Koordinatenpunkte geschrieben sind, machen  $\text{conv}\{(0, 0), (b, a), (d, c)\}$  ein elementares Dreieck und  $\left\{ \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \right\}$ , bzw.  $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$  Gitterbasen. Also beinhaltet die obige Figur 96 elementare Dreiecke.

Im Aufsatz “Geometrisches zur Zahlenlehre” (1899) geht Pick konstruktiv voran. Der Zusammenhang zwischen dem Satz von Pick und der Farey-Folge bliebe unbehelligt, betrachte man nur den BUCH-Beweis. Im Aufsatz skizziert Pick zuerst den nach ihm benannten Satz, dann im zweiten Teil wendet er die im ersten Teil entwickelte Methode auf den Satz von Euklid an. Im dritten Teil entwirft er eine geometrische Darlegung von Näherungsbrüchen, und an dieser Stelle weist er ausdrücklich auf die Farey-Folge. Zuletzt verfeinert er den Beweis aus dem ersten Teil. Wer Interesse hat, diesen Ansatz nachzuarbeiten, findet ein Link zum Aufsatz im Quellenverzeichnis.



Gesamtfigur gibt nach Vorigem die Punktzahl den Inhalt richtig an. Dies gilt also nach dem früheren Satze auch für die ursprüngliche Figur. Demnach ist für jedes Gitterpolygon der Inhalt gleich der Punktzahl.

## §. 2. Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie.

An der Spitze der Lehre von den ganzen Zahlen steht der Satz, dass zwei Zahlen,  $a$ ,  $b$ , stets einen gemeinsamen Theiler  $m$  besitzen, welcher in der Form

$$m = a\beta - b\alpha$$

darstellbar ist, wo auch  $\alpha$ ,  $\beta$  ganze Zahlen bedeuten.

Um ihn zu beweisen, legen wir ein beliebiges Parallelsystem in der Ebene zu Grunde.<sup>1)</sup> Die Punkte mit ganzzahligen Coordinaten bilden dann die Punkte eines Gitters, dessen Hauptgitterstrahlen den Axen parallel angenommen sein sollen. Den Gitterpunkt  $(a, b)$  verbinden wir mit dem Nullpunkt, und suchen die zwischen diesen Punkten auf der Verbindungslinie gelegenen Gitterpunkte auf; ihre Anzahl sei  $(m - 1)$ , wo  $m$  auch gleich Eins sein kann. Nach §. 1 wird die Strecke von  $(0, 0)$  bis  $(a, b)$  durch diese Punkte in  $m$  gleiche Theile zerlegt.

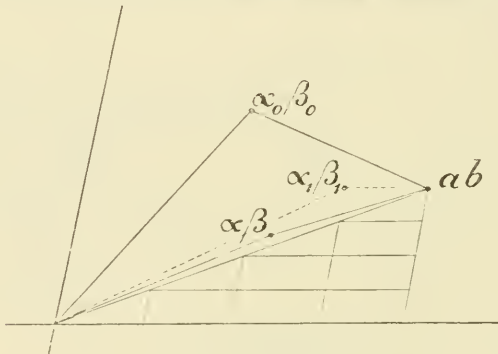


Fig. 3.

Dann ist  $m$  Theiler sowohl von  $a$  als von  $b$ . Denn zieht man durch diese  $(m - 1)$  Punkte und durch  $(a, b)$  selbst Parallele

<sup>1)</sup> Es ist dabei durchaus unnöthig, auf den beiden Axen mit gleicher Masseinheit zu messen.

# Quellen

- Aigner, Martin und Günter M. Ziegler. “Drei Anwendungen der Eulerschen Polyederformel.” In *Das Buch der Beweise*, 93-100. Berlin: Springer, 2015.
- “Connecting the Dots with Pick’s Theorem.” IMA.  
<https://ima.org.uk/10981/connecting-the-dots-with-picks-theorem/>  
Zuletzt aufgerufen: 6.12.21.
- “Georg Pick (Mathematiker).”  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Georg\\_Pick\\_\(Mathematiker\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Pick_(Mathematiker))  
Zuletzt aufgerufen: 6.12.2021.
- Oswald, Nicola und Jörn Steuding. “Die Farey-Folge und Ford-Kreise.” In *Elementare Zahlentheorie. Ein sanfter Einstieg in die höhere Mathematik*, 195-201. Berlin: Springer, 2015.
- Pick, Georg. “Geometrisches zur Zahlenlehre.” Sitzungsberichte Lotos (Prag), Natur-med. Verein für Böhmen 19 (1899), 311-319.  
[https://www.zobodat.at/publikation\\_volumes.php?id=34452](https://www.zobodat.at/publikation_volumes.php?id=34452) Zuletzt aufgerufen: 6.12.2021.