

SUMME $1/n^2$

Präsentation von Minh Phan



Erscheinungen

- es gibt viele andere Analysis-Beweise, die sich mit der Frage auseinandergesetzt haben
- hier Beweis mit nur “elementarer Mathematik”
- Man findet den Beweis in einer russischen Aufgabensammlung zur Analysis von den Zwillingenbrüdern Akiva und Isaak Yaglom (1954).
- Unterschiedliche Versionen dieser Idee wurden immer wieder entdeckt und publiziert von u.a.:
 - F. Holme (1970)
 - I. Papadimitiou (1973)
 - Ransford, der ihn John Scholes zuschrieb. (1982)

1. Kurze Wiederholung (sin, cos, exp)

2. Einige praktische Beobachtung

a) über Cotangens

i) kurzer Einschub: Fundamentalsatz der Algebra

ii) Lemma über Koeffizienten von Polynomen

b) über Kosekans

3. Zusammenführung

KURZE WIEDERHOLUNG

Die Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$(z \in \mathbb{C})$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

KURZE WIEDERHOLUNG

Für unseren Beweis benötigen wir folgende Relation:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \cdot \sin(z) \quad (\text{für jedes } z \in \mathbb{C})$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \exp(iz) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(z) + i \sin(z) \end{aligned}$$

□

(1) Aufteilung in gerade und ungerade Glieder

1.BEOBACHTUNG

Für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ gilt:

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \dots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

Wobei “cot” (Cotangens) wie folgt definiert ist:

$$\cot := \frac{\cos}{\sin}$$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

Aufgrund Potenzgesetzen und der zuvor gezeigten Relation zwischen \sin , \cos , \exp gilt für natürliche Zahlen n und reelle Zahlen x :

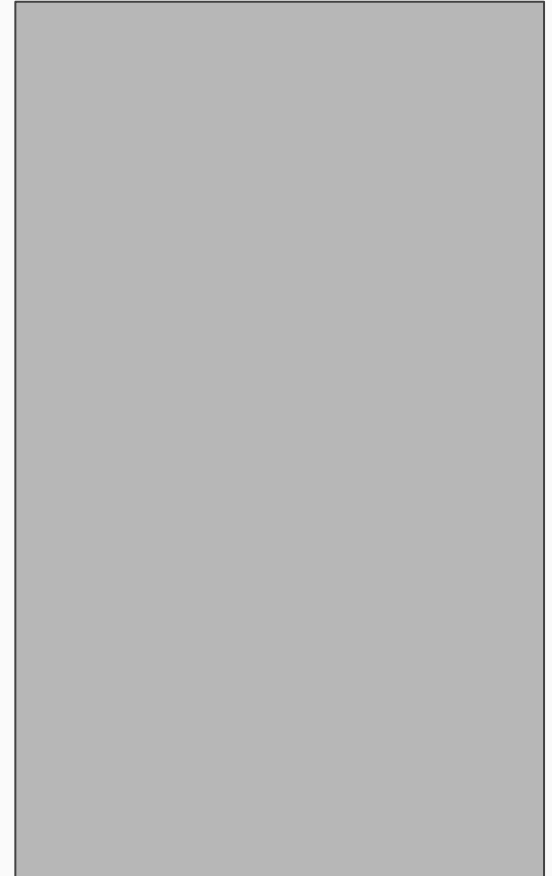
$$e^{inx} = (e^{ix})^n$$

$$\underbrace{\cos(nx) + i \cdot \sin(nx)}_{(a)} = \underbrace{(\cos(x) + i \cdot \sin(x))}_n^n$$

Wir schauen uns zweckmäßig die imaginären Teile der Terme an:

Imaginärteil von (a):

$$\text{Im}(\cos(nx) + i \cdot \sin(nx)) = \sin(nx)$$



BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

Imaginärteil von (b):

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n) &= \operatorname{Im}((i \cdot \sin(x) + \cos(x))^n) \\ &\stackrel{(1)}{=} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \cdot \sin(x))^k \cdot \cos^{n-k}(x)\right) \end{aligned}$$

Aus der Definition der imaginären Zahlen folgt:

$$\begin{aligned} i^{2k} &= (-1)^k \quad \text{und} \quad i^{2k+1} = i \cdot i^{2k} && (\text{für } k \in \mathbb{N}) \\ & && = i \cdot (-1)^k \end{aligned}$$

D.h. der Imaginärteil jedes zweiten Gliedes fällt raus!

(1)binom. Lehrsatz:

Für $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$\begin{aligned} \implies & \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \cdot \sin(x))^k \cdot \cos^{n-k}(x) \right) \\ &= \binom{n}{1} \sin(x) \cos^{n-1}(x) - \binom{n}{3} \sin^3(x) \cos^{n-3}(x) \pm \dots \\ & \hspace{15em} (1),(2) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich des Imaginärteils von (a) und (b) ergibt sich:

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots$$

(1) plus/minus, da die Glieder aufgrund "i^(2k+1)" stets abwechselnd positiv und negativ sind

(2) das letzte Glied kann nicht eingetragen werden, da nicht klar ist, ob n gerade oder ungerade ist

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots$$

wir setzen nun wieder zweckmäßig folgendes fest:

1. $n = 2m + 1$
2. $x = \frac{r\pi}{(2m + 1)}$ für $r = 1, 2, \dots, m$

$$\implies \sin(nx) = \sin\left((2m + 1) \cdot \frac{r\pi}{(2m + 1)}\right) = \sin(r\pi) \stackrel{(1)}{=} 0$$

$$(1) \sin^{-1}(\{0\}) = \{r\pi \mid r \in \mathbb{Z}\}$$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots$$

$$\stackrel{(1)}{\implies} 0 = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots$$

$$\stackrel{(2)}{\implies} 0 = \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x \pm \dots$$

$$\stackrel{(3)}{\implies} 0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \pm \dots$$

Die letzte Gleichung gilt also für unsere gewählten x und natürliche Zahlen $m \geq 1$.

- (1) $\sin(nx) = 0$
*siehe vorherige Folie
- (2) -division $\sin^n(x)$
& Def. cotangens
- (3) $n = 2m + 1$ nach unserer
Festlegung

ERINNERUNG: FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA

Fundamentalsatz der Algebra:

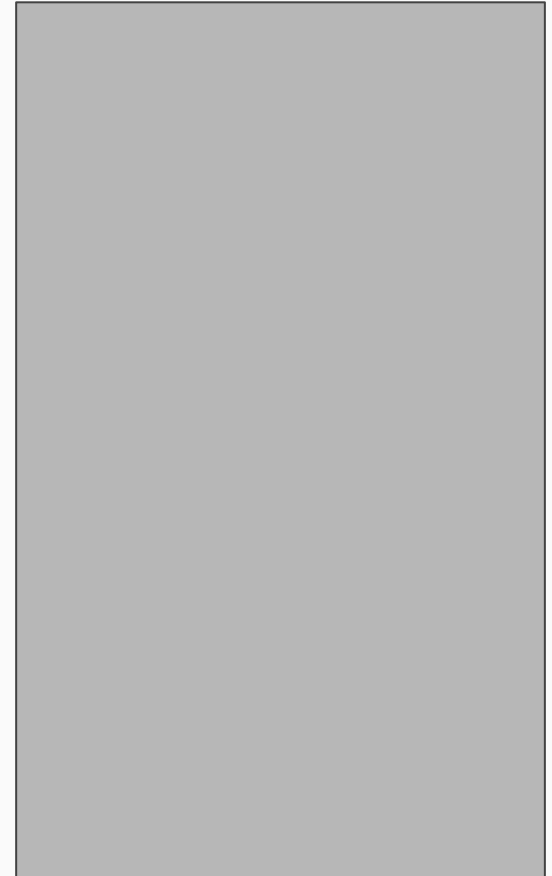
“ Jedes nicht konstante Polynom im Bereich der komplexen Zahlen besitzt mindestens eine Nullstelle”.

Korollar: Ein nicht konstantes Polynom P über \mathbb{C} kann man mittels seiner Nullstellen in Linearfaktoren aufgespalten:

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

- z_i sind die Nullstellen des Polynoms ($i \in \{1, \dots, n\}$)
- a_k sind die reellen Koeffizienten ($k \in \{0, \dots, n\}$)

(ohne Beweis)

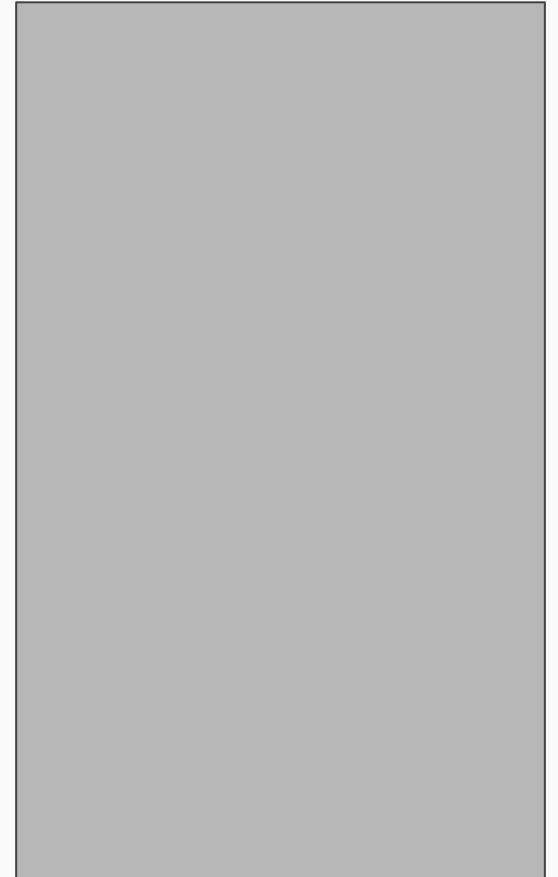


BEISPIEL

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

Folgendes Polynom f lässt sich z.B. wie folgt aufspalten:

$$\begin{aligned} f(z) &:= 4z^2 - 16 \\ \implies f(z) &= 4(z + 2)(z - 2) \end{aligned}$$



LEMMA ÜBER KOEFFIZIENTEN IN POLYNOMEN

Lemma:

Sei P ein Polynom mit $\deg(P) = n \geq 1$ in seinen Linearfaktoren durch die Nullstellen z_i gegeben ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$)

$$p(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

,dann ergibt sich der Koeffizient a_{n-1} von

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$$

aus:

$$a_{n-1} = -a_n(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$$

BEWEIS KOEFFIZIENTENVERGLEICH

(Induktionsbeweis)

$$\begin{aligned} \text{IA: } \text{für } n = 1: \quad p(z) &= a_1(z - z_1) \\ &= a_1 z - a_1 z_1 \end{aligned}$$

IS: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} p(z) &= a_{n+1}(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_{n+1}) \\ &= (z - z_{n+1}) \cdot a_{n+1}(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n) \\ &\stackrel{(1)}{=} (z - z_{n+1}) \cdot (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0 z^0) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(IV)}{=} (z - z_{n+1}) \cdot \left(a_{n+1} z^n - a_{n+1}(z_1 + z_2 + \dots + z_n) z^{n-1} + \dots + b_0 z^0 \right)$$

\implies Koeffizient a_n ergibt sich aus :

$$\begin{aligned} a_n &= -z_{n+1} a_{n+1} - a_{n+1}(z_1 + z_2 + \dots + z_n) \\ &= -a_{n+1}(z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}) \end{aligned}$$

□

(1) Umwandlung in
Koeffizientendarstellung

b_i seien die dazu passenden
Koeffizienten für $i \in \{0, \dots, n\}$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

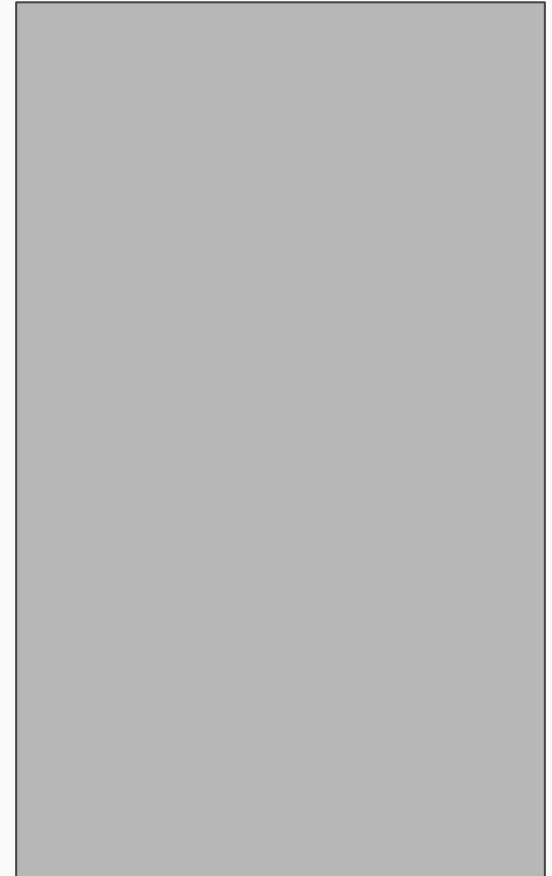
$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

gilt für: $x = \frac{r\pi}{2m+1}$ mit $r = 1, 2, \dots, m$

D.h wir kennen die Nullstellen folgenden Polynoms:

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

Mit Nullstellen: $t_r = \cot^2 x$
 $= \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right)$ für $r = 1, 2, \dots, m$



BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

Aus den vorherigen Überlegungen können wir das Polynom umschreiben:

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$
$$\stackrel{(1)}{\implies} p(t) = \binom{2m+1}{1} \left(t - \cot^2 \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) \right) \cdot \left(t - \cot^2 \left(\frac{2\pi}{2m+1} \right) \right) \\ \cdot \dots \cdot \left(t - \cot^2 \left(\frac{m\pi}{2m+1} \right) \right)$$

Aus den Koeffizientenvergleich muss aber auch folgendes gelten:

$$-\binom{2m+1}{3} = -\binom{2m+1}{1} \cdot (t_1 + t_2 + \dots + t_m)$$
$$\iff (t_1 + t_2 + \dots + t_r) = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}}$$

$$(1) f(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

-wobei z_i die Nullstellen sind

Erinnerung:

-die t_r waren die Nullstellen von p

$$t_r = \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) \text{ für } r = 1, 2, \dots, m$$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$\begin{aligned}(t_1 + t_2 + \dots + t_r) &= \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} \\ &= \frac{(2m+1)!}{3! \cdot (2m+1-3)!} \cdot \frac{1! \cdot (2m+1-1)!}{(2m+1)!} \\ &= \frac{2m(2m-1)}{6}\end{aligned}$$

Wenn wir nun für die t_r einsetzen erhalten wir unsere Behauptung.



Erinnerung:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.BEOBACHTUNG

Als nächstes versuchen benötigen wir folgende Relation:

Für natürliche Zahlen $m \geq 1$ gilt:

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \dots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}$$

Wobei \csc (Kosekans) wie folgt definiert ist:

$$\csc x := \frac{1}{\sin(x)}$$

BEWEIS 2.BEOBACHTUNG

Wir nutzen aus, dass wir \csc umschreiben können und die Ähnlichkeiten zu der ersten Beobachtung:

$$\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1$$

Damit können wir die zuvor bewiesene Relation umwandeln:

$$\begin{aligned} \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \dots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) &= \frac{2m(2m-1)}{6} \\ \stackrel{(+m)}{\implies} m + \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \dots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) &= m + \frac{2m(2m-1)}{6} \\ \implies \csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \dots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) &= \frac{2m(2m+2)}{6} \end{aligned}$$

□

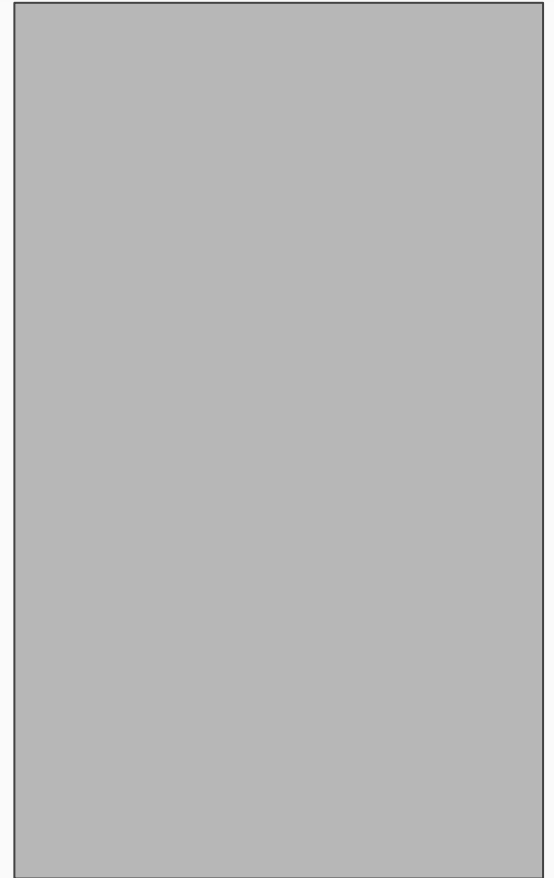
BEWEIS SUMME AUS $1/n^2$

Als letzte Voraussetzung für unseren Beweis benötigen wir folgende Relation:

Für $y \in (0, \pi/2)$ gilt:

$$\sin y \leq y \leq \tan y$$

Wir schauen uns hierfür die Differenzen und deren Differentiale an.



BEWEIS ($\sin y \leq y \leq \tan y$)

Wir definieren uns die "Differenzfunktion":

$$f(x) := x - \sin x$$

$$\implies f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0, \text{ da } \cos(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies f \text{ ist monoton steigend}$$

$$\implies f(0) \leq f(y) \text{ f\u00fcr } y \geq 0$$

$$\implies 0 \leq y - \sin y \implies \sin y \leq y$$

Analog:

$$g(x) := \tan x - x$$

$$\implies g'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} - 1 = \tan^2(x) \geq 0 \text{ f\u00fcr } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\implies g \text{ ist monoton steigend}$$

$$\implies g(0) \leq g(y) \text{ f\u00fcr } 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

$$\implies 0 \leq \tan y - y \implies y \leq \tan y$$



BEWEIS (ZUSAMMENFÜHRUNG)

Wir wissen also:

$$\begin{aligned} \text{Aus } y &\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\stackrel{(1)}{\implies} 0 < \sin y \leq y \leq \tan y \\ &\implies \frac{1}{\tan y} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sin y} \\ &\stackrel{(2)}{\implies} \cot(y) \leq \frac{1}{y} \leq \csc(y) \\ &\stackrel{(3)}{\implies} \cot^2(y) \leq \frac{1}{y^2} \leq \csc^2(y) \end{aligned}$$

(1)Relation auf letzter Seite

$$(2) \quad \csc x := \frac{1}{\sin(x)}$$

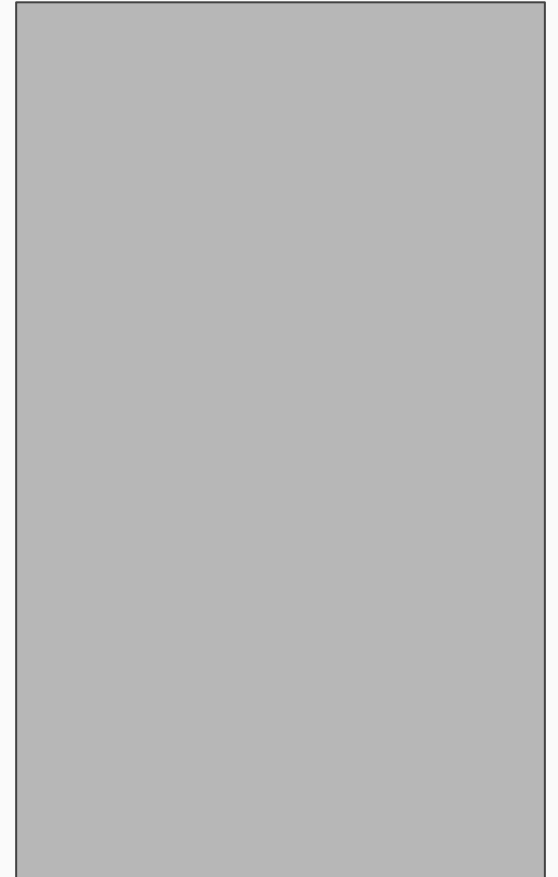
$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(3)Monotonie von $(\cdot)^2$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

Nach unserer Festlegung gilt:

$$x = \frac{r\pi}{2m+1} \leq \frac{m\pi}{2m+1} < \frac{m\pi}{2m} = \frac{\pi}{2}$$
$$\stackrel{(1)}{\implies} 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



BEWEIS (ZUSAMMENFÜHRUNG)

In Verbindung mit der ersten Beobachtung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{2m(2m-1)}{6} &= \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \dots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2\end{aligned}$$

Analog mit der zweiten Beobachtung:

$$\begin{aligned}\frac{2m(2m+2)}{6} &= \csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \dots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) \\ &\geq \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2\end{aligned}$$

Erinnerung:

1. Beobachtung: Für natürliche Zahlen $m \geq 1$ gilt:

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \dots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

2. Beobachtung: Für natürliche Zahlen $m \geq 1$ gilt:

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \dots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}$$

(*) Relation auf der letzten Seite: Für $0 < y < \pi/2$ gilt:

$$\cot^2(y) \leq \frac{1}{y^2} \leq \csc^2(y)$$

BEWEIS (ZUSAMMENFÜHRUNG)

Zusammen ergibt sich:

$$\frac{2m(2m-1)}{6} \leq \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 \leq \frac{2m(2m+2)}{6}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-1}{2m+1} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m+2}{2m+1}$$

Sowohl linke als auch rechte Seite konvergiert für $m \rightarrow \infty$
gegen $\frac{\pi^2}{6}$

Mittels "Sandwichlemma" folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

Quellen

- Das Buch der Beweise 3. Auflage Martin Aigner & Günter M. Ziegler
- https://de.wikipedia.org/wiki/Tangens_und_Kotangens
- https://de.wikipedia.org/wiki/Sekans_und_Kosekans
- https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra

Sowie Inhalte aus dem Analysis 1 Skript von PD Dr. habil. Olaf Müller und dem Skript über der linearen Algebra von Dr. rer. nat. Hella Rabus.