SUMME 1/n^2

Präsentation von Minh Phan

Erscheinungen

- es gibt viele andere Analysis-Beweise, die sich mit der Frage auseinandergesetzt haben
- hier Beweis mit nur “elementarer Mathematik”
- Man findet den Beweis in einer russischen Aufgabensammlung zur Analysis von den Zwillingsbrüdern Akiva und Isaak Yaglom (1954).
- Unterschiedliche Versionen dieser Idee wurden immer wieder entdeckt und publiziert von u.a.:
    - F. Holme (1970)
    - I. Papadimitiou (1973)
    - Ransford, der ihn John Scholes zuschrieb. (1982)

BEWEISSTRUKTUR

1. Kurze Wiederholung (sin, cos, exp)

2. Einige praktische Beobachtung
    a) über Cotangens
        i) kurzer Einschub: Fundamentalsatz der Algebra
        ii) Lemma über Koeffizienten von Polynomen
    b) über Kosekans

3. Zusammenführung

KURZE WIEDERHOLUNG

Die Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\boxed{exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

(z ∈ $\mathbb{C}$)

$$\boxed{cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}}$$

$$\boxed{sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

KURZE WIEDERHOLUNG

Für unseren Beweis benötigen wir folgende Relation:

$$\boxed{e^{iz} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)}$$

(für jedes z $\in \mathbb{C}$)

Beweis.

$$exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= cos(z) + i\ sin(z)$$

$\square$

(1) Aufteilung in gerade und ungerade Glieder

1.BEOBACHTUNG

Für jede natürliche Zahl m ≥ 1 gilt:

$$cot^2(\frac{\pi}{2m+1}) + cot^2(\frac{2\pi}{2m+1}) + \quad \dots \quad + cot^2(\frac{m\pi}{2m+1}) = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

Wobei “cot” (Cotangens) wie folgt definiert ist:

$$\cot := \frac{\cos}{sin}$$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

Aufgrund Potenzgesetzen und der zuvor gezeigten Relation zwischen sin, cos, exp gilt für natürliche Zahlen n und reelle Zahlen x:

$$e^{inx} = \left(e^{ix}\right)^n$$

$$\underbrace{\cos(nx) + i \cdot \sin(nx)}_{\text{(a)}} = \underbrace{(\cos(x) + i \cdot \sin x)^n}_{\text{(b)}}$$

Wir schauen uns zweckmäßig die imaginären Teile der Terme an:

Imaginärteil von (a):

$$Im(\cos(nx) + i \cdot \sin(nx)) = \sin(nx)$$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

Imaginärteil von (b):

$$Im((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n) = Im((i \cdot \sin(x) + \cos(x))^n)$$
$$\overset{(1)}{=} Im\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i \cdot \sin(x))^k \cdot \cos^{n-k}(x)\right)$$

Aus der Definition der imaginären Zahlen folgt:

$$i^{2k} = (-1)^k \; und \; i^{2k+1} = i \cdot i^{2k}$$
$$= i \cdot (-1)^k$$

(für k $\in \mathbb{N}$)

D.h. der Imaginärteil jedes zweiten Gliedes fällt raus!

(1)binom. Lehrsatz:
Für n $\in \mathbb{N}$, a,b $\in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$\Longrightarrow \quad Im\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i \cdot \sin(x))^{k} \cdot \cos^{n-k}(x)\right)$$

$$= \binom{n}{1}\sin(x)\cos^{n-1}(x) - \binom{n}{3}\sin^{3}(x)\cos^{n-3} \pm \ldots$$

(1),(2)

Aus dem Vergleich des Imaginärteils von (a) und (b) ergibt sich:

$$\sin(nx) = \binom{n}{1}\sin x\, \cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^{3} x\, \cos^{n-3} x \pm \ldots$$

(1) plus/minus, da die Glieder aufgrund "i^(2k+1)" stets abwechselnd positiv und negativ sind

(2) das letzte Glied kann nicht eingetragen werden, da nicht klar ist, ob n gerade oder ungerade ist

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \ldots$$

wir setzen nun wieder zweckmäßig folgendes fest:

1. $n = 2m + 1$
2. $x = \dfrac{r\pi}{(2m+1)}$ $\quad$ *für* $r = 1, 2, \ldots, m$

$$\Longrightarrow \sin(nx) = \sin\left((2m+1) \cdot \frac{r\pi}{(2m+1)}\right) = \sin(r\pi) \overset{(1)}{=} 0$$

(1) $\sin^{-1}(\{0\}) = \{r\pi \mid r \in \mathbb{Z}\}$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad 0 = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad 0 = \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x \pm \dots$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad 0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \pm \dots$$

Die letzte Gleichung gilt also für unsere gewählten x und natürliche Zahlen m ≥ 1.

(1) sin(nx) = 0
*siehe vorherige Folie

(2) -division $\sin^n(x)$
& Def. cotangens

(3) n = 2m + 1 nach unserer Festlegung

ERINNERUNG: FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA

Fundamentalsatz der Algebra:

> “ Jedes nicht konstante Polynom im Bereich der komplexen Zahlen besitzt mindestens eine Nullstelle”.

Korollar: Ein nicht konstantes Polynom P über $\mathbb{C}$ kann man mittels seiner Nullstellen in Linearfaktoren aufgespalten:

$$\boxed{P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)}$$

- z_i sind die Nullstellen des Polynoms (i ∈ {1, … , n})
- a_k sind die reellen Koeffizienten (k ∈ {0, … , n})

(ohne Beweis)

BEISPIEL

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)}$$

Folgendes Polynom f lässt sich z.B. wie folgt aufspalten:

$$f(z) := 4z^2 - 16$$
$$\implies f(z) = 4(z+2)(z-2)$$

LEMMA ÜBER KOEFFIZIENTEN IN POLYNOMEN

Lemma:

Sei P ein Polynom mit deg(P) = n ≥ 1 in seinen Linearfaktoren durch die Nullstellen z_i gegeben (i ∈ {1,2, …, n})

$$p(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

,dann ergibt sich der Koeffizient a_{n-1} von

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$$

aus:

$$\boxed{a_{n-1} = -a_n(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)}$$

BEWEIS KOEFFIZIENTENVERGLEICH

(Induktionsbeweis)

IA : für n = 1: $p(z) = a_1(z - z_1)$

$= a_1\, z - a_1 z_1$

IS: n -> n + 1

$$\begin{aligned} p(z) &= a_{n+1}\,(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n+1}) \\ &= (z - z_{n+1}) \cdot a_{n+1}\,(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \\ &\overset{(1)}{=} (z - z_{n+1}) \cdot \left(b_n z^n + b_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + b_0\, z^0\right) \end{aligned}$$

$$\overset{(IV)}{=} (z - z_{n+1}) \cdot \left(a_{n+1} z^n \overbrace{- a_{n+1}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\, z^{n-1}} + \ldots + b_0 z^0\right)$$

$$\Longrightarrow \; Koeffizient\, a_n\, ergibt\, sich\, aus:$$

$$\begin{aligned} a_n &= -z_{n+1} a_{n+1} - a_{n+1}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \\ &= -a_{n+1}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1}) \end{aligned}$$

$\square$

(1)Umwandlung in Koeffizientendarstellung

b_i *seien die dazu passenden Koeffizienten für* $i \in \{0, \ldots, n\}$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

gilt für: $x = \frac{r\pi}{2m+1} \qquad mit \;\; r = 1, 2, \dots, m$

D.h wir kennen die Nullstellen folgenden Polynoms:

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

Mit Nullstellen:

$$\begin{aligned} t_r &= \cot^2 x \\ &= \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) \qquad für \quad r = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

Aus den vorherigen Überlegungen können wir das Polynom umschreiben:

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \ldots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \; p(t) = \binom{2m+1}{1}\left(t - \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)\right) \cdot \left(t - \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(t - \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)\right)$$

Aus den Koeffizientenvergleich muss aber auch folgendes gelten:

$$-\binom{2m+1}{3} = -\binom{2m+1}{1} \cdot (t_1 + t_2 + \ldots + t_m)$$

$$\Longleftrightarrow \; (t_1 + t_2 + \ldots + t_r) = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}}$$

(1) $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$

-wobei z_i die Nullstellen sind

Erinnerung:

-die t_r waren die Nullstellen von p

$t_r = \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right)$ $\textit{für } r = 1, 2, \ldots, m$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

$$(t_1 + t_2 + \ldots + t_r) = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}}$$
$$= \frac{(2m+1)!}{3! \cdot (2m+1-3)!} \cdot \frac{1! \cdot (2m+1-1)!}{(2m+1)!}$$
$$= \frac{2m(2m-1)}{6}$$

Wenn wir nun für die t_r einsetzen erhalten wir unsere Behauptung.

$\square$

Erinnerung:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.BEOBACHTUNG

Als nächstes versuchen benötigen wir folgende Relation:

Für natürliche Zahlen m ≥ 1 gilt:

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}$$

Wobei csc (Kosekans) wie folgt definiert ist:

$$\csc x := \frac{1}{\sin(x)}$$

BEWEIS 2.BEOBACHTUNG

Wir nutzen aus, dass wir csc umschreiben können und die Ähnlichkeiten zu der ersten Beobachtung:

$$\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1$$

Damit können wir die zuvor bewiesene Relation umwandeln:

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

$$\overset{(+m)}{\Longrightarrow} m + \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = m + \frac{2m(2m-1)}{6}$$

$$\Longrightarrow \csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}$$

$\square$

BEWEIS SUMME AUS 1/n^2

Als letzte Voraussetzung für unseren Beweis benötigen wir folgende Relation:

Für y ∈ (0, π/2) gilt:

$$\boxed{\sin y \leq y \leq \tan y}$$

Wir schauen uns hierfür die Differenzen und deren Differentiale an.

BEWEIS (sin y ≤ y ≤ tan y)

Wir definieren uns die "Differenzfunktion":

$$f(x) := x - \sin x$$
$$\implies f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0,\ da\ \cos(x) \leq 1\,\forall x \in \mathbb{R}$$
$$\implies f\,ist\,monoton\,steigend$$
$$\implies f(0) \leq f(y)\quad für\quad y \geq 0$$
$$\implies 0 \leq y - \sin y \implies \sin y \leq y$$

Analog:

$$g(x) := \tan x - x$$
$$\implies g'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{cos^2(x)} - 1 = \tan^2(x) \geq 0\ für\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$
$$\implies g\,ist\,monoton\,steigend$$
$$\implies g(0) \leq g(y)\ \ für\ 0 < y < \frac{\pi}{2}$$
$$\implies 0 \leq \tan y - y \implies y \leq \tan y$$

$\square$

BEWEIS (ZUSAMMENFÜHRUNG)

Wir wissen also:

Aus $\quad y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \; 0 < \sin y \leq y \leq \tan y$$

$$\Longrightarrow \; \frac{1}{\tan y} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sin y}$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \; \cot(y) \leq \frac{1}{y} \leq \csc(y)$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \; \cot^2(y) \leq \frac{1}{y^2} \leq \csc^2(y)$$

(1)Relation auf letzter Seite

(2) $\quad \csc x := \frac{1}{\sin(x)}$

$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

(3)Monotonie von $\; (\cdot)^2$

BEWEIS 1.BEOBACHTUNG

Nach unserer Festlegung gilt:

$$x = \frac{r\pi}{2m+1} \leq \frac{m\pi}{2m+1} < \frac{m\pi}{2m} = \frac{\pi}{2}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

BEWEIS (ZUSAMMENFÜHRUNG)

In Verbindung mit der ersten Beobachtung ergibt sich:

$$\frac{2m(2m-1)}{6} = \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)$$
$$\overset{(*)}{\leq} \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2$$

Analog mit der zweiten Beobachtung:

$$\frac{2m(2m+2)}{6} = \csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)$$
$$\geq \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2$$

Erinnerung:

1.Beobachtung: Für natürliche Zahlen m ≥ 1 gilt:

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

2.Beobachtung: Für natürliche Zahlen m ≥ 1 gilt:

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}$$

(*) Relation auf der letzten Seite: Für $0 < y < \pi/2$ gilt:

$$\cot^2(y) \leq \frac{1}{y^2} \leq \csc^2(y)$$

BEWEIS (ZUSAMMENFÜHRUNG)

Zusammen ergibt sich:

$$\frac{2m(2m-1)}{6} \leq \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 \leq \frac{2m(2m+2)}{6}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\pi^2}{6}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m-1}{2m+1} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} \leq \frac{\pi^2}{6}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m+2}{2m+1}$$

Sowohl linke als auch rechte Seite konvergiert für $m \to \infty$ gegen $\frac{\pi^2}{6}$

Mittels “Sandwichlemma” folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\square$

Quellen

- Das Buch der Beweise 3. Auflage Martin Aigner & Günter M. Ziegler
- https://de.wikipedia.org/wiki/Tangens_und_Kotangens
- https://de.wikipedia.org/wiki/Sekans_und_Kosekans
- https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra

Sowie Inhalte aus dem Analysis 1 Skript von PD Dr. habil. Olaf Müller und dem Skript über der linearen Algebra von Dr. rer. nat. Hella Rabus.