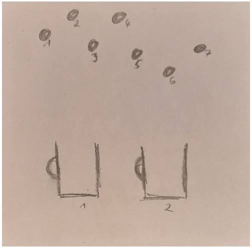
Schubfachprinzip

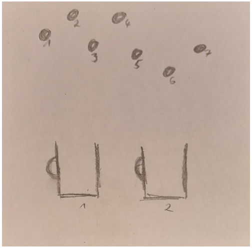
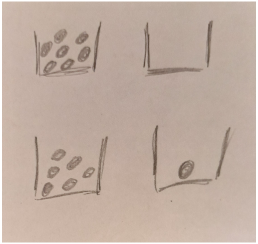
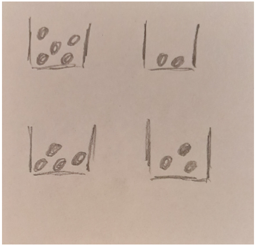
Nicolas Stephan

December 10, 2021

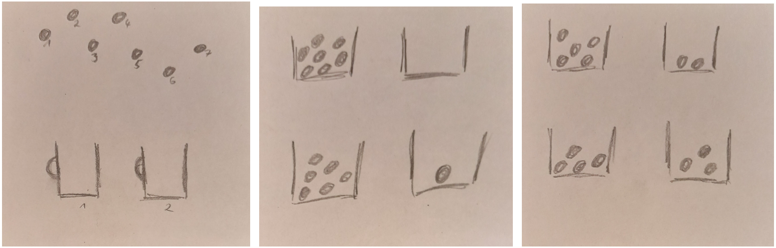
Schubfachprinzip - Definition



Schubfachprinzip - Definition

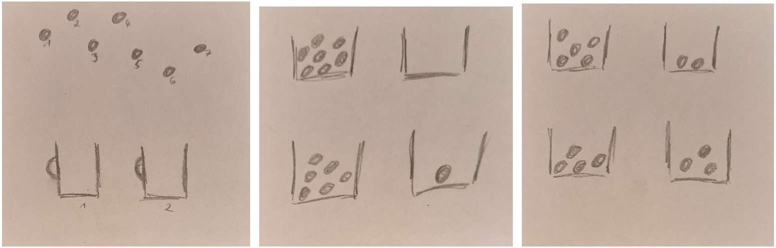




Schubfachprinzip - Definition



Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mehr als eines der Objekte.

Schubfachprinzip - Definition

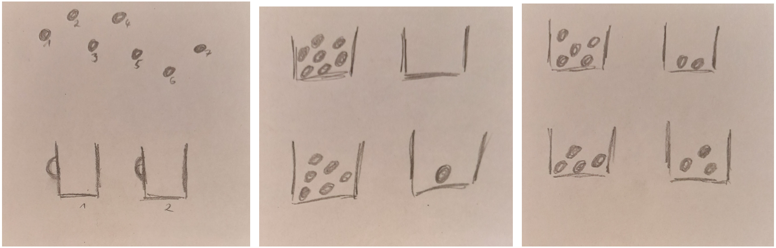


Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mehr als eines der Objekte.

Beweis per Gegenbeweis:

Man nehme an: In jedem der r Fächer liegt maximal eines von n Objekten. $(r < n)$

Schubfachprinzip - Definition

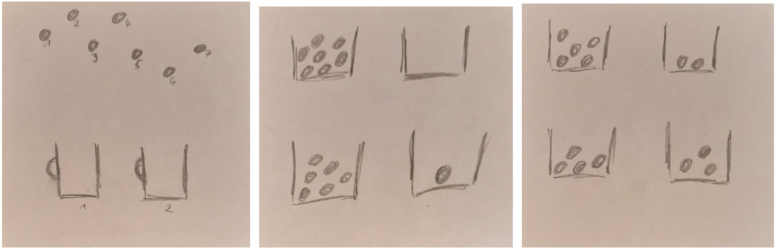


Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mehr als eines der Objekte.

Beweis per Gegenbeweis:

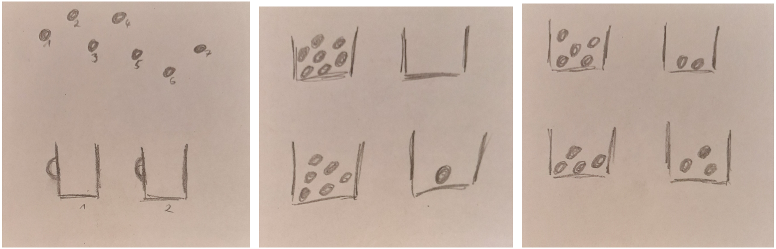
Man nehme an: In jedem der r Fächer liegt maximal eines von n Objekten. $(r < n)$
$=>$ Es gibt maximal r Objekte. Widerspruch!

Schubfachprinzip - "verschärft"



Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mindestens $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ der Objekte.

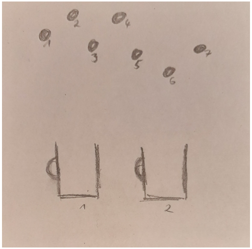
Schubfachprinzip - ”verschärft”

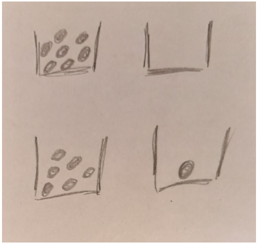


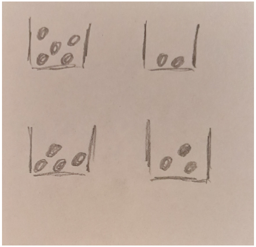
Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mindestens $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ der Objekte.

Seien N die endliche Menge aller Objekte und R die endliche Menge aller Fächer. Es gilt $|N| = n > r = |R| > 0$. Sei zudem $f : N \to R$ eine Abbildung die jedes Objekt $m \in N$ ein Fach $a \in R$ zuordnet.

Schubfachprinzip - "verschärft"



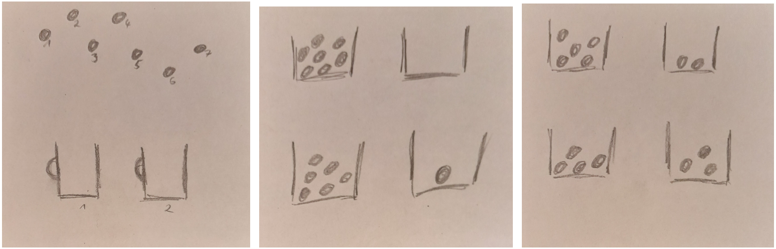




Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mindestens $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ der Objekte.

Seien N die endliche Menge aller Objekte und R die endliche Menge aller Fächer. Es gilt $|N| = n > r = |R| > 0$. Sei zudem $f : N \to R$ eine Abbildung die jedes Objekt $m \in N$ ein Fach $a \in R$ zuordnet.
Beweis per Gegenbeweis: Seien in allen Fächer weniger als $\frac{n}{r}$ Objekte. Sprich: $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$.

Schubfachprinzip - "verschärft"



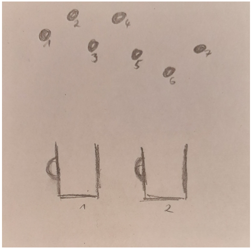
Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mindestens $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ der Objekte.

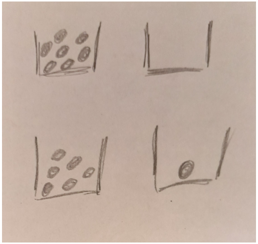
Seien N die endliche Menge aller Objekte und R die endliche Menge aller Fächer. Es gilt $|N| = n > r = |R| > 0$. Sei zudem $f : N \rightarrow R$ eine Abbildung die jedes Objekt $m \in N$ ein Fach $a \in R$ zuordnet.

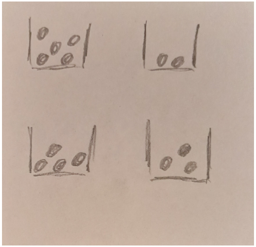
Beweis per Gegenbeweis: Seien in allen Fächer weniger als $\frac{n}{r}$ Objekte. Sprich: $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$.

$=> n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)|$

Schubfachprinzip - "verschärft"







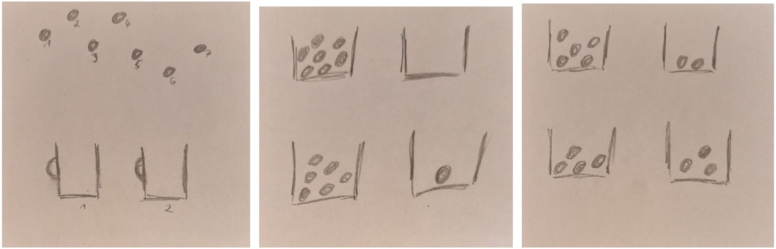
Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mindestens $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ der Objekte.

Seien N die endliche Menge aller Objekte und R die endliche Menge aller Fächer. Es gilt $|N| = n > r = |R| > 0$. Sei zudem $f : N \to R$ eine Abbildung die jedes Objekt $m \in N$ ein Fach $a \in R$ zuordnet.

Beweis per Gegenbeweis: Seien in allen Fächer weniger als $\frac{n}{r}$ Objekte. Sprich: $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$.

$=> n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r\frac{n}{r}$

Schubfachprinzip - "verschärft"



Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mindestens $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ der Objekte.

Seien N die endliche Menge aller Objekte und R die endliche Menge aller Fächer. Es gilt $|N| = n > r = |R| > 0$. Sei zudem $f : N \to R$ eine Abbildung die jedes Objekt $m \in N$ ein Fach $a \in R$ zuordnet.

Beweis per Gegenbeweis: Seien in allen Fächer weniger als $\frac{n}{r}$ Objekte. Sprich: $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$.

$=> n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r\frac{n}{r} = n$ Widerspruch!

SFP im Einsatz

1. Zahlen (BUCH)
2. Folgen (BUCH)
3. Summen (BUCH)
4. Bonus

SFP im Einsatz - Zahlen

"**Behauptung.** *Nehmen wir wieder eine Menge* $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$. *Dann gibt es immer zwei Zahlen in A, so dass eine die andere teilt.*"

SFP im Einsatz - Zahlen

"**Behauptung.** *Nehmen wir wieder eine Menge* $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$*. Dann gibt es immer zwei Zahlen in* A*, so dass eine die andere teilt.*"

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $(n = 5)$

SFP im Einsatz - Zahlen

"**Behauptung.** *Nehmen wir wieder eine Menge* $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$. *Dann gibt es immer zwei Zahlen in* A, *so dass eine die andere teilt.*"

Beweis:
$a \in A$ schreiben in Form $a = 2^k m$
sei m eine ungerade Zahl zwischen 1 und $2n - 1$

SFP im Einsatz - Zahlen

"**Behauptung.** *Nehmen wir wieder eine Menge* $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$*. Dann gibt es immer zwei Zahlen in* A*, so dass eine die andere teilt.*"

Beweis:
$a \in A$ schreiben in Form $a = 2^k m$
sei m eine ungerade Zahl zwischen 1 und $2n - 1$

Beispiel:

Menge:	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
k:	$\{0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1\}$
m:	$\{1, 1, 3, 1, 5, 3, 7, 1, 9, 5\}$

SFP im Einsatz - Zahlen

"**Behauptung.** *Nehmen wir wieder eine Menge* $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$*. Dann gibt es immer zwei Zahlen in* A*, so dass eine die andere teilt.*"

Beweis:
$a \in A$ schreiben in Form $a = 2^k m$
sei m eine ungerade Zahl zwischen 1 und $2n - 1$

Beispiel:

Menge:	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
k:	$\{0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1\}$
m:	$\{1, 1, 3, 1, 5, 3, 7, 1, 9, 5\}$

in A liegen $n + 1$ Elemente; m kann eine von n ungerade Zahlen annehmen

SFP im Einsatz - Zahlen

"**Behauptung.** *Nehmen wir wieder eine Menge* $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$. *Dann gibt es immer zwei Zahlen in* A*, so dass eine die andere teilt.*"

Beweis:
$a \in A$ schreiben in Form $a = 2^k m$
sei m eine ungerade Zahl zwischen 1 und $2n - 1$

Beispiel:

Menge:	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
k:	$\{0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1\}$
m:	$\{1, 1, 3, 1, 5, 3, 7, 1, 9, 5\}$

in A liegen $n + 1$ Elemente; m kann eine von n ungerade Zahlen annehmen
$=>$ es gibt mind. zwei Zahlen mit demselben m ($2^k m$ und $2^j m$)

SFP im Einsatz - Zahlen

"**Behauptung.** *Nehmen wir wieder eine Menge* $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$. *Dann gibt es immer zwei Zahlen in A, so dass eine die andere teilt.*"

Beweis:
$a \in A$ schreiben in Form $a = 2^k m$
sei m eine ungerade Zahl zwischen 1 und $2n - 1$

Beispiel:

Menge:	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
k:	$\{0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1\}$
m:	$\{1, 1, 3, 1, 5, 3, 7, 1, 9, 5\}$

in A liegen $n + 1$ Elemente; m kann eine von n ungerade Zahlen annehmen
$=>$ es gibt mind. zwei Zahlen mit demselben m ($2^k m$ und $2^j m$)
$=>$ diese besagten Zahlen sind deutlich teilbar

SFP im Einsatz - Folgen

"**Behauptung.** *In einer Folge* $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ *von* $mn+1$ *verschiedenen reellen Zahlen gibt es immer eine ansteigende Teilfolge*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}, \text{ wobei gilt } i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1},$$

der Länge $m+1$*, oder eine absteigende Teilfolge*

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}, \text{ wobei gilt } j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1},$$

der Länge $n+1$*, oder beides.*"

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 1: es gibt ein $t_i \geq m + 1$

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 1: es gibt ein $t_i \geq m + 1$
$=>$ es gibt eine aufsteigende Teilfolge der Länge $m + 1$

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}, \text{ wobei gilt } i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1}.$$

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 2: für alle i gilt $t_i \leq m$

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 2: für alle i gilt $t_i \leq m$
sei $f : a_i \mapsto t_i$ ($a_i \in \{a_1, \ldots, a_{mn+1}\}$ und $t_i \in \{1, \ldots, m\}$)

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 2: für alle i gilt $t_i \leq m$
sei $f : a_i \mapsto t_i$ ($a_i \in \{a_1, \ldots, a_{mn+1}\}$ und $t_i \in \{1, \ldots, m\}$)
=> "verschärftes" SFP: $\exists s \in \{1, \ldots, m\} : f(a_i) = s$ für
$\lceil \frac{mn+1}{m} \rceil = n + 1$ Zahlen a_i

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 2: für alle i gilt $t_i \leq m$
sei $f : a_i \mapsto t_i$ ($a_i \in \{a_1, \ldots, a_{mn+1}\}$ und $t_i \in \{1, \ldots, m\}$)
=> "verschärftes" SFP: $\exists s \in \{1, \ldots, m\} : f(a_i) = s$ für
$\lceil \frac{mn+1}{m} \rceil = n + 1$ Zahlen a_i
=> diese Zahlen seine nun $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}$

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 2: für alle i gilt $t_i \leq m$
sei $f : a_i \mapsto t_i$ ($a_i \in \{a_1, \ldots, a_{mn+1}\}$ und $t_i \in \{1, \ldots, m\}$)
$=>$ "verschärftes" SFP: $\exists s \in \{1, \ldots, m\} : f(a_i) = s$ für
$\lceil \frac{mn+1}{m} \rceil = n + 1$ Zahlen a_i
$=>$ diese Zahlen seine nun $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}$
zwei aufeinanderfolgende a_{j_k} und $a_{j_{k+1}}$ ($=$?, $<$?, $>$?)

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 2: für alle i gilt $t_i \leq m$
sei $f : a_i \mapsto t_i$ ($a_i \in \{a_1, \ldots, a_{mn+1}\}$ und $t_i \in \{1, \ldots, m\}$)
=> "verschärftes" SFP: $\exists s \in \{1, \ldots, m\} : f(a_i) = s$ für
$\lceil \frac{mn+1}{m} \rceil = n + 1$ Zahlen a_i
=> diese Zahlen seine nun $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}$
zwei aufeinanderfolgende a_{j_k} und $a_{j_{k+1}}$ (=?, <?, >?)
=> $a_{j_k} > a_{j_{k+1}} \forall k \in \{1, \ldots, n\}$

SFP im Einsatz - Folgen

Beweis:

jede Zahl a_i wird ein t_i zugeordnet
(t_i ist die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von a_1 bis a_i)

Fall 2: für alle i gilt $t_i \leq m$
sei $f: a_i \mapsto t_i$ ($a_i \in \{a_1, \ldots, a_{mn+1}\}$ und $t_i \in \{1, \ldots, m\}$)
$=>$ "verschärftes" SFP: $\exists s \in \{1, \ldots, m\} : f(a_i) = s$ für
$\lceil \frac{mn+1}{m} \rceil = n + 1$ Zahlen a_i
$=>$ diese Zahlen seine nun $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}$
zwei aufeinanderfolgende a_{j_k} und $a_{j_{k+1}}$ ($=?$, $<?$, $>?$)
$=> a_{j_k} > a_{j_{k+1}} \forall k \in \{1, \ldots, n\}$
$=>$ es gibt eine absteigende Teilfolge der Länge $n+1$

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}, \text{ wobei gilt } j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1}.$$

SFP im Einsatz - Summen

"**Behauptung.** *Gegeben seien n ganze Zahlen* $a_1, \ldots, a_n$ *die nicht verschieden sein müssen. Dann gibt es immer einen Abschnitt von aufeinander folgenden Zahlen* $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$, *deren Summe* $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ *ein Vielfaches von n ist.*"

SFP im Einsatz - Summen

Beweis:

Seien N und R Mengen
$N = \{\sum_{k=1}^{0} a_i, \sum_{k=1}^{1} a_i, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_i\}$ und $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

SFP im Einsatz - Summen

Beweis:

Seien N und R Mengen
$N = \{\sum_{k=1}^{0} a_i, \sum_{k=1}^{1} a_i, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_i\}$ und $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
Sei $f : N \rightarrow R$ eine Abbildung, die jedes Element aus N ein Rest aus R bei Division durch n zuordnet.

SFP im Einsatz - Summen

Beweis:

Seien N und R Mengen
$N = \{\sum_{k=1}^{0} a_i, \sum_{k=1}^{1} a_i, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_i\}$ und $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
Sei $f : N \to R$ eine Abbildung, die jedes Element aus N ein Rest aus R bei Division durch n zuordnet.
Es gilt $|N| = n + 1$ und $|R| = n$

SFP im Einsatz - Summen

Beweis:

Seien N und R Mengen
$N = \{\sum_{k=1}^{0} a_i, \sum_{k=1}^{1} a_i, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_i\}$ und $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
Sei $f : N \to R$ eine Abbildung, die jedes Element aus N ein Rest aus R bei Division durch n zuordnet.
Es gilt $|N| = n + 1$ und $|R| = n$
$=>$ nach SFP gilt: es gibt mindestens zwei Summern mit demselben Rest

SFP im Einsatz - Summen

Beweis:

Seien N und R Mengen
$N = \{\sum_{k=1}^{0} a_i, \sum_{k=1}^{1} a_i, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_i\}$ und $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
Sei $f : N \to R$ eine Abbildung, die jedes Element aus N ein Rest aus R bei Division durch n zuordnet.
Es gilt $|N| = n + 1$ und $|R| = n$
$=>$ nach SFP gilt: es gibt mindestens zwei Summern mit demselben Rest
$=>$

$$\sum_{i=k+1}^{l} a_i = \sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i$$

SFP im Einsatz - Bonus

"**Behauptung.** *Es gibt eine Potenz 3^k, die auf 0001 endet.*"

Beweis:

Wie wir es auch in vorherigen Teil gemacht haben, bilden wir uns zwei Mengen:
M soll unsere Menge 3^k sein:
$M := \{3^0, 3^1, \cdots, 3^{10000}\}; |M| = 10^4 + 1$
Zudem haben wir eine Restmenge $R := \{0, 1, \cdots, 9999\}, |R| = 10^4$
So können wir wieder eine Abbildung $f : M \to R$ schaffen, welches jedes Element aus M einen Rest aus R zuordnet. (diesmal bei Division durch 10^4)
Tun wir dies, folgt aus dem SFP, dass es zwei Elemente geben muss, die denselben Rest haben, seien dies 3^i und 3^j.
$\Rightarrow 3^j - 3^i$ ist durch 10^4 teilbar
$\Rightarrow 3^j - 3^i = 3^i * 3^{j-i} - 3^i = 3^i * (3^{j-i} - 1)$ ist durch 10^4 teilbar
da 3^i nicht durch 10^4 teilbar sein kann (eine 3er-Potenz endet immer mit 1, 3, 9 oder 7) muss $3^{i-j} - 1$ durch 10^4 teilbar sein $\Rightarrow$
3^{i-j} endet (durch die Subtraktion mit der 1) mit 0001!

Schubfachprinzip - Ende

Quelle: BUCH der Beweise

Schubfachprinzip - Ende

Danke fürs anschauen :D