Das BUCH der Beweise - Kardinalzahlen und Ordinalzahlen

Damien Heese

06.12.2021

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

- Bis zur zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts war keineällgemeine Beschreibung"mathematischer Objekte bekannt
- Ab 1874 prägte Georg Cantor den Begriff der Menge

  „Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen."
  -Georg Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In: Mathematische Annalen 46 (1895), S. 481

- transfinit = „über das Endliche hinaus", d.h. Mengen können auch „unendlich viele" Elemente enthalten

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

- Die wohl bekannteste unendliche Menge sind die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
- Was heißt „unendlich viele“ eigentlich? Diese Frage führte Cantor zum Begriff der Kardinalität
- Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn zwischen ihnen eine Bijektion existiert
- Es gibt verschiedene unendliche Kardinalitäten, z.B. enthalten $\mathbb{N}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ „gleich viele“ Elemente, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ enthalten jedoch „mehr“ Elemente (bekannt durch Hilberts Hotel)

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

- Cantors Definition führt bei der Betrachtung unendlicher Mengen jedoch zu Problemen
- Die Russellsche Antinomie entlarvte die heute sogenannte „naive Mengenlehre“ als in sich widersprüchlich
- Die „Naivität“ bestand darin, anzunehmen, dass jede Menge, die logisch beschrieben werden kann, auch existiert
- Russells einfaches Gegenbeispiel: Sei $M := \{\text{A} \mid \text{A ist eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält}\}$
- Die logische Beschreibung ist einfach, doch die Menge selbst ist paradox

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

Die moderne Mengenlehre basiert auf strikten Axiomenschemata, die bekanntesten von ihnen sind die ZF- und die ZFC-Axiomatik, die unter anderem folgende Axiome enthalten:

- Das Unendlichkeitsaxiom liefert eine Konstruktion der natürlichen Zahlen
- Das Fundierungsaxiom schließt viele widersprüchliche Mengendefinitionen aus (z.B., dass eine Menge sich selbst als Element enthält)
- Nur ZFC: Das Auswahlaxiom begründet den Wohlordnungssatz, der die Grundlage für die Theorie der Ordinalzahlen bildet

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

- Ist M eine endliche Menge, so besitzt sie eine natürliche Zahl n von Elementen
- Man sagt „M hat die Mächtigkeit/Kardinalität/Kardinalzahl n“ und schreibt $\#M = n$ oder $|M| = n$
- Da diese Kardinalzahlen natürliche Zahlen sind, folgt für zwei Mengen M, N mit $|M| = m, |N| = n$ die Bedeutung der Schreibweisen $|M| = |N|, |M| \leq |N|, |M| \geq |N|, |M| < |N|, |M| > |N|$ aus den entsprechenden Relationen auf den natürlichen Zahlen
- z.B. $|\{0, 1\}| = 2, |\{2, 3\}| = 2$; also $|\{0, 1\}| = |\{2, 3\}|$

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

- Nun wollen wir auch Kardinalzahlen für unendliche Mengen definieren und diese vergleichen
- Folgende Definition ist für endliche Mengen äquivalent zur bisherigen Formulierung:
  - $|M| = |N| :\Leftrightarrow \exists f : M \to N$, f bijektiv
  - $|M| \leq |N| :\Leftrightarrow \exists D \subset N : \exists f : M \to D$, f bijektiv
  - $|M| < |N| :\Leftrightarrow |M| \leq |N| \wedge \neg |M| = |N|$
- z.B.: $f : \{0,1\} \to \{2,3\}; n \mapsto n+2$ ist bijektiv, also $|\{0,1\}| = |\{2,3\}|$

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

- Diese Definition funktioniert auch für unendliche Mengen: Hilberts Hotel ist eine Darstellung dieser Überlegung (Gäste werden Räumen „zugeordnet“) und zeigt auf, dass z.B. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$, aber $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
- Offensichtlich gibt es also auch verschiedene unendliche Kardinalzahlen
  - Die Kardinalzahl von $\mathbb{N}$ wird oft als $\aleph_0$ bezeichnet
- Nun ist es interessant, ob für diese Ordnung die gleichen „Rechenregeln“ gelten wie für natürliche Zahlen, auch wenn man unendliche Kardinalzahlen zulässt

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Eine wichtige Eigenschaft dieser Ordnung ist die folgende:

- $|M| \leq |N| \wedge |N| \leq |M| \Rightarrow |M| = |N|$
- Das ist analog zum endlichen Fall und liefert auch eine neue Beweismethode für die Gleichmächtigkeit zweier Mengen: Statt einer Bijektion findet man zwei Injektionen $g : M \to D \subseteq N$, $h : N \to C \subseteq M$; g, h bijektiv

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Beweis: $\exists g : M \to D \subseteq N,\ h : N \to C \subseteq M;\ g, h$ bijektiv
$\Rightarrow f : M \to N,\ f$ bijektiv

- Seien g, h wie gefordert gegeben. Dann gilt $\forall m \in M \exists d = g(m) \in D \subseteq N$, $\forall n \in N \exists c = h(n) \in C \subseteq M$
- Außerdem gilt $\forall d \in D \subseteq N \exists g^{-1}(d) = m \in M$, $\forall c \in C \subseteq M \exists h^{-1}(c) = n \in N$, die Elemente von $N \setminus D$ und $M \setminus C$ jedoch besitzen natürlich kein Urbild
- Diese Eigenschaften benutzen wir, um $M \cup N$ disjunkt in Teilmengen zu zerlegen, in denen sich jedem Element von N genau ein Element von M zuordnen lässt

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Wir unterscheiden vier Arten derartiger Teilmengen, die wir auf folgende Art erhalten:

- Wir wählen ein $m_0 \in M$, betrachten $n_0 = g(m_0) \in N$, $m_1 = h(n_0) \in M$, etc...
- Sofort ergeben sich zwei Fälle:
  - 1. Wir erhalten eine unendliche „Kette“ von Elementen, in denen sich kein Element wiederholt
  - 2. Es existiert ein n_k mit $h(n_k) = m_0$, wodurch eine „zyklische Kette“ entsteht
  - Eine andere Möglichkeit gibt es nicht, insbesondere ist m_0 immer das „erste Duplikat“, alles andere wäre ein Verstoß gegen die Injektivität

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

- Für die unendlichen Ketten betrachten wir jetzt auch die Linksinversen von g und h, wodurch wir die Fälle 2-4 erhalten:
  - 2. Auch die Kette $n_{-1} = h^{-1}(m_0)$, $m_{-1} = g^{-1}(n_{-1})$, n_{-2}... lässt sich unendlich fortsetzen
  - 3. Die Kette bricht in einem $m_k \in M$ ab, welches kein Urbild bezüglich h besitzt
  - 4. Die Kette bricht in einem $n_k \in N$ ab, welches kein Urbild bezüglich g besitzt

Da diese Fälle sich gegenseitig ausschließen, kommt jedes $m \in M$ und jedes $n \in N$ in genau einer dieser Ketten vor

- Die Ketten lassen sich nun so nummerieren, dass $f(m_j) = n_j$ die gesuchte Bijektion f definiert

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

- 1. Zyklische Kette: $m_0 \to n_0 \to m_1 \to ... \to n_k \to m_0$
- 2. Unendliche Kette ohne Startpunkt: $... \to m_{-1} \to n_{-1} \to m_0 \to n_0 \to m_1 \to ...$
- 3. Unendl. Kette mit Startpunkt in M: $m_0 \to n_0 \to m_1 \to ...$
- 4. Unendl. Kette mit Startpunkt in N: $n_0 \to m_0 \to n_1 \to ...$

Mit dieser Definition ist $f : M \to N$ bijektiv, und somit sind die Mengen gleichmächtig.
Also gilt $|M| \leq |N| \wedge |N| \leq |M| \Rightarrow |N| = |M|$. $\square$

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Dieses Ergebnis kann man nutzen, um zu beweisen, dass $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

- Der Einfachheit halber zeigt man $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}| = |(0, 1]|$
- $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\} \to (0, 1]; \ A \mapsto \sum_{i \in A} 10^{-i}$
  ordnet jeder Teilmenge von $\mathbb{N}$(außer $\{\varnothing\}$) eine eindeutige Zahl in $(0, 1]$ zu
- $h : (0, 1] \to \mathcal{P}(N) \setminus \{\varnothing\}; 0, b_1 b_2 b_3 ... \mapsto b_i 10^i | i \in \mathbb{N}$
  ordnet jeder Zahl in $(0, 1]$ eine eindeutige Teilmenge von $\mathbb{N}$ zu
- Nach dem Satz von Cantor-Bernstein gilt also $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}| = |(0, 1]|$ und somit auch $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Weiterhin wollen wir uns mit folgenden Fragen beschäftigen:

- Gibt es zu jeder Kardinalzahl eine größere?
- Gibt es zu jeder Kardinalzahl eine nächstgrößere?
- Wenn ja, ist $|\mathbb{R}|$ die nächstgrößere Kardinalzahl nach $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$?

Die erste Frage lässt sich eindeutig beantworten: Ja, es gibt immer eine größere Kardinalzahl.

Die zweite und dritte Frage jedoch sind... überhaupt nicht eindeutig.

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Der Beweis ist sehr elegant und greift auch auf die Russellsche Antinomie zurück. Wir vergleichen die Mächtigkeit einer beliebigen Menge mit der ihrer Potenzmenge.

Sei |M| eine beliebige Menge. zz.: $|\mathcal{P}(M)| > |M|$

- Es ist einfach, zu zeigen, dass $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.
  Sei $f : M \to \mathcal{P}(M), m \mapsto \{m\}$, offensichtlich ist f injektiv.
- Zu zeigen, dass $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ ist schwerer, denn es muss gezeigt werden, dass keine injektive Funktion $g : \mathcal{P}(M) \to M$ existieren kann.

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, es existiere eine bijektive Funktion $g : N \subset M \to \mathcal{P}(M)$

- Dann existiert die Menge $U_g \subset N$, $U_g := \{m \in N | m \notin g(m)\}$ als wohldefinierte Teilmenge von N
- In Worten: U_g ist die Menge aller Elemente von N, die kein Element der Menge sind, auf die sie durch g abgebildet werden
- Da $U_g \subset N \subset M$, folgt $U_g \subset M$, also $U_g \in \mathcal{P}(M)$
- Da g eine Bijektion ist, existiert ein $u \in N$ mit $g(u) = U_g$

Gilt $u \in U_g$ oder $u \notin U_g$?

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Eine von beiden Optionen „muss“ wahr sein, jedoch sind beide unmöglich:

- $u \in U_g \Leftrightarrow u \in g(u) \Rightarrow u \notin U_g$
- $u \notin U_g \Leftrightarrow u \notin g(u) \Rightarrow u \in U_g$

Die Existenz dieses u ist widersprüchlich, also kann g nicht wirklich eine Bijektion sein.
Da dementsprechend keine Bijektion existiert, ist $|\mathcal{P}(M)| > |M|$.

Genauso ist dann $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| > |\mathcal{P}(M)|$, etc. - es lässt sich immer eine größere Kardinalzahl finden.

Dieses Argument ist eine Variante der Russellschen Antinomie.

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Existiert zu jeder Kardinalzahl a auch eine nächstgrößere Kardinalzahl b, also eine Kardinalzahl b, sodass $\exists M : |M| = a \wedge \exists N : |N| = b \wedge \nexists O : a < |O| < b$?

Um sich mit dieser Frage weitergehend zu beschäftigen, benötigt man die Theorie der Ordinalzahlen. Diese setzt das Auswahlaxiom voraus. In Modellen ohne das Auswahlaxiom lässt sich diese Frage also nicht beantworten.

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

In einer endlichen Menge M mit $|M| = n \in \mathbb{N}$ lassen sich die Elemente ordnen.

- Wir können schreiben $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$
- Egal, wie man diese Ordnung permutiert, der höchste Index ist stets n
- Beispiel: Sowohl in der Aufzählung $\{1, 2, 3, 4\}$ als auch in $\{2, 4, 1, 3\}$ ist das letzte Element das Vierte
- Unter einer Ordnungsrelation $<$, z.B. $1 < 2 < 3 < 4$ oder $2 < 4 < 1 < 3$ kann man sagen: Das größte Element ist das Viertkleinste

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

In bestimmten unendlichen Mengen funktioniert das auch.

- Beispiel: $\mathbb{N}$ mit der bekannten $<$-Relation. Jede natürliche Zahl $n \in \{0, 1, 2, 3...\}$ hat dabei $n + 1$ als Index.
- Im Gegensatz zum endlichen Fall lässt sich jedoch die Struktur der Ordnung ändern:
  - In der bekannten Ordnung hat jedes Element einen endlichen Index und es gibt kein größtes Element
  - In der Ordnung $1 < 2 < 3 < ... < 0$ ist 0 das größte Element, es gibt jedoch unendlich viele kleinere Elemente, dementsprechend müsste der Index „unendlich" sein.
  - In der Ordnung $0 < 2 < 4 < ...1 < 3 < 5...$ gibt es dann noch den Index „unendlich plus eins", „unendlich plus 2" etc.
  - In der Ordnung $... < 4 < 2 < 0 < 1 < 3 < 5 < ...$ lässt sich überhaupt kein nach unten beschränkter Index definieren
- Das Problem der letzten Ordnung umgeht man durch die Definition der sog. Wohlordnungen

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Eine Totalordnung auf einer Menge M heißt Wohlordnung, wenn jede Teilmenge von M ein kleinstes Element hat.

- Diese Definition sorgt dafür, dass die Elemente der Menge M aufgezählt werden können (kleinstes, 2.-kleinstes, 3.-kleinstes,...), verhindert aber nicht, dass an einem Punkt „über unendlich hinaus“ (in Cantors Worten „transfinit“) gezählt wird.
- Abhängig von der Ordnungsstruktur einer Menge lässt sich jeder wohlgeordneten Menge eine „Ordinalzahl“ zuordnen
  - Man beachte, dass es zu einer Kardinalzahl mehrere Ordinalzahlen, aber zu einer Ordinalzahl nur eine Kardinalzahl geben kann
- Man kann sich dies als eine Erweiterung des Begriffs des größten Elements auf unendliche Mengen vorstellen

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

- Für endliche Mengen ist die Ordinalzahl immer gleich $|M|$
- Für unendliche Mengen hängt die Ordinalzahl außerdem von der Wohlordnung ab
- Die „kleinste unendliche Ordinalzahl“ gehört zur Menge $|\mathbb{N}| = \{0, 1, 2, 3...\}$ und wird gemeinhin als ω bezeichnet
- Die Ordinalzahl von $\{1, 2, 3, ..., 0\}$ ist dann $\omega + 1$, zu $\{0, 2, 4, ..., 1, 3, 5\}$ gehört 2ω, genauso kann durch andere Umordnung die Ordinalzahl $\omega \cdot \omega$ erreicht werden
    - vgl. Hilbert-Hotel, Cantorsches Diagonalverfahren

Wie sehen die Ordinalzahlen von überabzählbaren Mengen (z.B. $\mathbb{R}$) aus?

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Lassen sich überabzählbare Mengen überhaupt wohlordnen?

- Die bekannte Totalordnung auf $\mathbb{R}$ ist offensichtlich keine Wohlordnung: $(0, 1)$ besitzt kein Minimum
- Der Wohlordnungssatz besagt, dass JEDE Menge wohlgeordnet werden kann (liefert dafür aber kein Verfahren)
- Der Wohlordnungssatz ist äquivalent zum Auswahlaxiom und somit unabhängig von den restlichen Axiomen der ZF-Mengenlehre
- Gehen wir von der Korrektheit des Auswahlaxioms aus, so existiert mindestens eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ und somit auch mindestens eine Ordinalzahl
- Das gleiche gilt dann auch für jede beliebige Menge

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Nun wollen wir die Ordinalzahlen vergleichen.

- Sei M eine wohlgeordnete Menge, $m \in M$, dann heißt $M_m := \{x \in M : x < m\}$ der von m bestimmte Abschnitt von M
- Sei μ die Ordinalzahl von M, ν die Ordinalzahl von N. Dann ist $\mu < \nu$, wenn es zwischen M und einem Abschnitt von N eine ordnungserhaltende Abbildung gibt
- Beispiel:
  - Sei $N = \{1, 2, 3, ..., 0\}$. Dann ist $N_0 = \{1, 2, 3, ...\}$
  - Sei $M = \mathbb{N} = 0, 1, 2, ...$ Dann ist $f : M \to N_0, n \mapsto n + 1$ bijektiv und es gilt $n < m \Leftrightarrow f(n) < f(m)$
  - Wir erinnern uns: Die Ordinalzahl von $\mathbb{N}$ ist ω, die von N ist $\omega + 1$. Nach unserer Definition gilt jetzt $\omega < \omega + 1$.
- Genauso gilt $\omega + 1 < 2\omega < \omega \cdot \omega$

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Wie bereits erwähnt, gibt es zu jeder Ordinalzahl μ eine entsprechende Kardinalzahl $|\mu|$ (da zwei Mengen mit der gleichen Ordinalzahl auch gleichmächtig sind).

- Aus der Definition der Ordinalzahlordnung folgt: $\mu < \nu \Rightarrow |\mu| \leq |\nu|$
- Die ordnungserhaltenden Abbildungen sind immer bijektiv und die Abschnitte einer wohlgeordneten Menge sind immer Teilmengen
- Man beachte, dass aus der Striktordnung eine schwache Ordnung wird, z.B. ist $\omega < \omega + 1$, aber $|\omega| = |\omega + 1| = \aleph_0$

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

- Eine wichtige Aussage über die Ordinalzahlen ist die folgende: Eine beliebige Menge von Ordinalzahlen ist untereinander vergleichbar und selbst wieder wohlgeordnet
- Aigner und Ziegler verzichten auf einen Beweis hierzu
- Das bedeutet insbesondere, dass es zu jeder Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ genau eine kleinste Ordinalzahl $\omega_{\mathfrak{m}}$ gibt, die man die initiale Ordinalzahl nennt.

Mit dieser Aussage lässt sich nun zeigen, dass es zu jeder Kardinalzahl eine nächstgrößere gibt.

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Beweis: Zu jeder Kardinalzahl existiert eine wohldefinierte nächstgrößere.

- Sei $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl.
- Es existiert eine größere Kardinalzahl $\mathfrak{n}$.
- Sei nun $\mathcal{K}$ die Menge aller Kardinalzahlen $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{m} < \mathfrak{p} \leq \mathfrak{n}$ und $\mathcal{K}_{\mathcal{O}} := \{\omega_{\mathfrak{p}} | \mathfrak{p} \in \mathcal{K}\}$
    - Die Menge $\mathcal{K}_{\mathcal{O}}$ existiert nach Annahme des Auswahlaxioms und mit der Aussage von der vorherigen Folie ist sie wohlgeordnet
- Da $\mathcal{K}_{\mathcal{O}}$ wohlgeordnet ist, enthält sie ein kleinstes Element $\omega_{\mathfrak{p}_0}$
- $\forall \mathfrak{p} \in \mathcal{K} : \omega_{\mathfrak{p}_0} < \omega_{\mathfrak{p}} \Rightarrow \forall \mathfrak{p} \in \mathcal{K} : \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{p}$

Also ist $\mathfrak{p}_0$ auch die kleinste Kardinalzahl, die größer ist als $\mathfrak{m}$. Dementsprechend existiert zu jeder Kardinalzahl eine nächstgrößere.

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Wenn es zu jeder Kardinalzahl eine nächstgrößere gibt, lassen sie sich indizieren:

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, die nächstgrößere Kardinalzahl heißt dann $\aleph_1$, dann kommen $\aleph_2, \aleph_3, \ldots$
- Als Indizes sind dann selbst wieder Ordinalzahlen möglich, aber vorerst wollen wir uns auf natürliche Zahlen beschränken
- Genauer gesagt reichen uns zwei: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ und $\aleph_1$, denn jetzt stellen wir uns die Frage: Gilt $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$?
  - Also: Ist $\mathbb{R}$ die nächstgrößere Menge nach $\mathbb{N}$ oder existiert eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$?

Mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln sollte man diese Frage beantworten können... oder?

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Die Aussage $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$ wurde schon 1878 von Georg Cantor formuliert und ist als Kontinuumshypothese bekannt.

- Zur Erinnerung: Genauso postulierte Cantor den Wohlordnungssatz

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Beide Aussagen bekamen durch die Einführung der ZFC-Axiomatik neue Bedeutung: Waren sie mit den Axiomen vereinbar oder stellten sie einen Widerspruch dar?

- Kurt Gödel zeigte 1938, dass das Auswahlaxiom zumindest keinen Widerspruch zu den anderen 9 Axiomen darstellt; und dass die Kontinuumshypothese keinen Widerspruch zu ZFC darstellt
- 1963 jedoch zeigte Paul Cohen, dass auch die Aussage "das Auswahlaxiom gilt nicht"keinen Widerspruch zu ZF, und "die Kontinuumshypothese gilt nicht"keinen Widerspruch zu ZFC darstellt

Und was heißt das jetzt?

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Es gibt verschiedene Modelle der Mengenlehre, in denen die folgenden Aussagen gelten:

- ZF, aber nicht das Auswahlaxiom
- ZFC, aber nicht die Kontinuumshypothese
- ZFC und die Kontinuumshypothese

Und was ist ein Modell?

- Es ist vorstellbar als eine „Interpretation“ der Axiome, die widerspruchsfrei erfüllt werden sollen
- Zum Beispiel ist Gödels „Klasse der konstruierbaren Mengen“ ein Modell für ZFC + Kontinuumshypothese

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Die Modelle der Mengenlehre sind recht abstrakt, deshalb ein besser verständliches Beispiel aus der Geometrie:

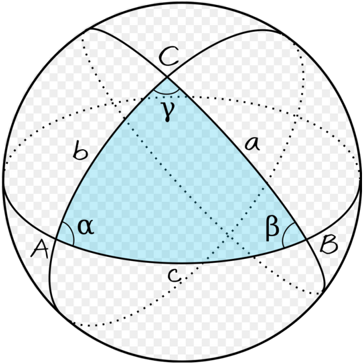
- Die Axiome der „absoluten Geometrie“ umfassen unter anderem die eindeutige Bestimmbarkeit von Geraden durch Punkte, die auf ihnen liegen, sowie die Definierbarkeit von Längen und Winkeln zwischen Punkten und gehen auf den griechischen Mathematiker Euklid zurück
- Euklid benannte auch folgendes Axiom: Sei g eine Gerade, und P ein Punkt $P \notin g$. Dann existiert genau eine Parallele von g durch P.

Dieses Axiom ist unabhängig von den anderen Axiomen. Ein gegensätzliches Axiom gehört zur elliptischen Geometrie: Es existieren keine parallelen Geraden.

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Ein Modell für die euklidische Geometrie liefert die bekannte kartesische Ebene.

Ein Modell für die elliptische Geometrie hingegen liefert die Kugeloberfläche mit der Menge der „Großkreise“ als Geraden.



Zwei dieser Großkreise haben immer mindestens zwei Schnittpunkte, somit existieren keine Parallelen.

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

In unterschiedlichen Axiomensystemen gelten unterschiedliche Sätze:

- 1. In der elliptischen Geometrie ist die Winkelsumme eines Dreiecks immer größer als 180°
- 2. In Mengenmodellen ohne das Auswahlaxiom gibt es Mengen M und N, sodass $|M| \not< |N| \land |M| \not> |N| \land |M| \neq |N|$
- 3. Ein Beispiel für eine Aussage, die äquivalent zur Kontinuumshypothese ist (mit Beweis) findet sich im BUCH der Beweise(Aigner, Ziegler), Kapitel 17

Ein kurzer Abriss der Geschichte der Mengenlehre

Kardinalzahlen und die Vergleichbarkeit unendlicher Mengen

Zu jeder Kardinalzahl existiert eine größere

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Die Kontinuumshypothese und andere unabhängige Axiome

Quellen

- Das BUCH der Beweise; Aigner, Ziegler
- https://www.math.uni-hamburg.de/home/geschke/teaching/MMskriptV2.pdf