# Das Bertrandsche Postulat

Gertrud Graser

3. Dezember 2021

Instiitut für Informatik
Humboldt Universität zu Berlin

## Das Bertrandsche Postulat

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

## Das Bertrandsche Postulat

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

## Beispiele

für $n = 2$ existiert $p = 3$,

für $n = 20$ existieren $p_1 = 29$, $p_2 = 31$, $p_3 = 37$

# Begründer des Postulates

# Joseph Bertrand[2]

Joseph Bertrand

- Französischer Mathematiker
- *1822-†1900
- Hat das Postulat 1845 formuliert
- Nur bis n = 3 000 000 tatsächlich verifiziert

# Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow (Чебышёв)[1]

- Einer der bedeutensten russischen Mathematiker des 19. Jh
- *1821-†1894
- Hat das Postulat 1850 bewiesen

Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow

# Der Beweis

# Beweis Idee

**Das Bertrandsche Postulat**

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

# Beweis Idee

**Das Bertrandsche Postulat**

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

**Ein Beweis in 5 Schritten** (Inspiriert von Paul Erdős, [3])

# Beweis Idee

**Das Bertrandsche Postulat**

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

**Ein Beweis in 5 Schritten** (Inspiriert von Paul Erdős, [3])

1. Zeige das Resultat für $n \leq 511$.

# Beweis Idee

Das Bertrandsche Postulat

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

Ein Beweis in 5 Schritten (Inspiriert von Paul Erdős, [3])

1. Zeige das Resultat für $n \leq 511$.
2. Beweise, dass für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ $\displaystyle\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$ gilt.

# Beweis Idee

## Das Bertrandsche Postulat

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

**Ein Beweis in 5 Schritten** (Inspiriert von Paul Erdős, [3])

1. Zeige das Resultat für $n \leq 511$.
2. Beweise, dass für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ $\displaystyle\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$ gilt.
3. Untersuche die Primzahlen, die den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ teilen.

# Beweis Idee

## Das Bertrandsche Postulat

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

**Ein Beweis in 5 Schritten** (Inspiriert von Paul Erdős, [3])

1. Zeige das Resultat für $n \leq 511$.
2. Beweise, dass für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ $\displaystyle\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$ gilt.
3. Untersuche die Primzahlen, die den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ teilen.
4. Schätze $\binom{2n}{n}$ von oben und unten ab, abhängig von der Anzahl der Primzahlen $P(n)$ zwischen $n$ und $2n$.

## Beweis Idee

### Das Bertrandsche Postulat

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert eine Primzahl $p$ mit $n < p \leq 2n$.

### Ein Beweis in 5 Schritten (Inspiriert von Paul Erdős, [3])

1. Zeige das Resultat für $n \leq 511$.
2. Beweise, dass für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ $\displaystyle\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$ gilt.
3. Untersuche die Primzahlen, die den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ teilen.
4. Schätze $\binom{2n}{n}$ von oben und unten ab, abhängig von der Anzahl der Primzahlen $P(n)$ zwischen $n$ und $2n$.
5. Zeige, dass die Abschätzung aus 4. für $n \geq 512$, $P(n) > 0$ impliziert.

# 1. Zeige Resultat für $n \leq 511$.

Betrachte die Menge von Primzahlen:

$$P := \{2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 521\}. \tag{1}$$

# 1. Zeige Resultat für $n \leq 511$.

Betrachte die Menge von Primzahlen:

$$P := \{2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 521\}. \tag{1}$$

Für diese gilt bereits

$$\forall p_1 \in P \; \exists p_2 \in P : p_1 < p_2 < 2p_1. \tag{2}$$

# 1. Zeige Resultat für $n \leq 511$.

Betrachte die Menge von Primzahlen:

$$P := \{2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 521\}. \tag{1}$$

Für diese gilt bereits

$$\forall p_1 \in P \; \exists p_2 \in P : p_1 < p_2 < 2p_1. \tag{2}$$

Und damit gilt die Behauptung auch für alle $n \in \mathbb{N}$ die zwischen diesen Primzahlen liegen, also insbesondere für alle $n \leq 511$.

# 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

Es wird induktiv über die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ gezeigt.

## 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

Es wird induktiv über die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ gezeigt.

Bemerke:
Für $q \in \mathbb{P}$ mit $q \leq x$ maximal in dieser Eigenschaft:

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \text{ und } 4^{q-1} \leq 4^{x-1}. \tag{3}$$

## 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

Es wird induktiv über die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ gezeigt.

**Bemerke:**
Für $q \in \mathbb{P}$ mit $q \leq x$ maximal in dieser Eigenschaft:

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \text{ und } 4^{q-1} \leq 4^{x-1}. \tag{3}$$

Es genügt also die Behauptung nur für Primzahlen $x$ zu zeigen, also insbesondere natürliche.

# 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

**Induktionsanfang**
Für $x = 2$:

$$\prod_{p \leq 2} p = 2 \leq 4 = 4^{2-1}. \tag{4}$$

D.h., die Behauptung ist wahr.

# 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

**Induktionsanfang**
Für $x = 2$:

$$\prod_{p \leq 2} p = 2 \leq 4 = 4^{2-1}. \tag{4}$$

D.h., die Behauptung ist wahr.

Da nach Definition alle anderen Primzahlen ungerade sind, genügt es ab nun nur noch $x = 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

## 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

**Induktionsanfang**
Für $x = 2$:

$$\prod_{p \leq 2} p = 2 \leq 4 = 4^{2-1}. \tag{4}$$

D.h., die Behauptung ist wahr.

Da nach Definition alle anderen Primzahlen ungerade sind, genügt es ab nun nur noch $x = 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

**Induktionsvoraussetzung**
Für alle natürlichen Zahlen $2 \leq x \leq 2m$ sein die Behauptung erfüllt.

# 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

Induktionsschritt $x = 2m+1$
Dafür gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{p \leq 2m+1} p &= \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \\
{}_{IV} &\leq 4^m \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \\
(a) &\leq 4^m \binom{2m+1}{m} \\
(b) &\leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}
\end{aligned}$$

a) $\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\dots(m+2)}{m!} \in \mathbb{N} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)(2m)(2m-1)\dots(m+2) = \binom{2m+1}{m} m!. \tag{6}$$

## 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

a) $\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots(m+2)}{m!} \in \mathbb{N} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)(2m)(2m-1)\ldots(m+2) = \binom{2m+1}{m} m!. \tag{6}$$

Außerdem gilt $\forall p \in \mathbb{P}$ mit $m+1 < p \leq 2m+1:$

$$p \mid (2m+1)(2m)(2m-1)\ldots(m+2) \;\text{ und }\; p \nmid m!. \tag{7}$$

# 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

a) $\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\dots(m+2)}{m!} \in \mathbb{N} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)(2m)(2m-1)\dots(m+2) = \binom{2m+1}{m} m!. \tag{6}$$

Außerdem gilt $\forall p \in \mathbb{P}$ mit $m+1 < p \leq 2m+1:$

$$p \mid (2m+1)(2m)(2m-1)\dots(m+2) \text{ und } p \nmid m!. \tag{7}$$

Damit folgt

$$p \mid \binom{2m+1}{m}. \tag{8}$$

D.h. alle $p$ sind Primfaktoren von $\binom{2m+1}{m}$, da dieser aber noch mehr Primfaktoren haben kann folgt $(a)$.

# 2. Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x,\, p \in \mathbb{P}} p \leq 4^{x-1}$.

b) $\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$
Der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n \tag{9}$$

b)$\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$
Der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n \tag{9}$$

liefert für $x = y = 1, n = 2m+1$

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2 \cdot 2^{2m}. \tag{10}$$

b) $\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$
Der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n \tag{9}$$

liefert für $x = y = 1, n = 2m+1$

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2 \cdot 2^{2m}. \tag{10}$$

Mit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ gilt $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ und da beide Terme in (10) enthalten sind folgt

b)$\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$
Der binomische Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n \tag{9}$$

liefert für $x = y = 1, n = 2m+1$

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2 \cdot 2^{2m}. \tag{10}$$

Mit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ gilt $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ und da beide Terme in (10) enthalten sind folgt

$$2\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leq \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2 \cdot 2^{2m}.$$

Und das ist äquivalent zu $(b)$.

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

**Satz von Legendre**
Für alle $n \in \mathbb{N}$ enthält $n!$ die Primzahl $p$ genau

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{11}$$

Mal.

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

**Satz von Legendre**
Für alle $n \in \mathbb{N}$ enthält $n!$ die Primzahl $p$ genau

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{11}$$

Mal.

Betrachtet man nun $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ folgt

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

**Satz von Legendre**
Für alle $n \in \mathbb{N}$ enthält $n!$ die Primzahl $p$ genau

$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{11}$$

Mal.

Betrachtet man nun $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ folgt

a) $(2n)!$ enthält $p$ genau $\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor$ Mal.

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

**Satz von Legendre**
Für alle $n \in \mathbb{N}$ enthält $n!$ die Primzahl $p$ genau

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{11}$$

Mal.

Betrachtet man nun $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ folgt

a) $(2n)!$ enthält $p$ genau $\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor$ Mal.

b) $n!n!$ enthält $p$ genau $2 \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ Mal.

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

**Satz von Legendre**
Für alle $n \in \mathbb{N}$ enthält $n!$ die Primzahl $p$ genau

$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{11}$$

Mal.

Betrachtet man nun $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ folgt

a) $(2n)!$ enthält $p$ genau $\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor$ Mal.

b) $n!n!$ enthält $p$ genau $2\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ Mal.

Damit folgt, dass $\binom{2n}{n}$ p genau $\sum_{k\geq 1} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$ Mal enthält.

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

Damit lässt sich beobachten:

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

Damit lässt sich beobachten:

A) Jeder Summand der Summe ist höchstens 1, da

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2. \tag{12}$$

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

Damit lässt sich beobachten:

A) Jeder Summand der Summe ist höchstens 1, da

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2. \tag{12}$$

B) Für $p^k > 2n$ verschwinden die Summanden. Also gilt mit (A)

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right) \leq \sum_{k\geq 1}^{p^k\leq 2n} 1 = \max\{k \mid p^k \leq 2n\}. \tag{13}$$

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

c) Alle $p > \sqrt{2n}$ sind maximal ein Mal in $\binom{2n}{n}$ enthalten, da

$$\sum_{k \geq 1} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{2n}{p^1} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor < 2. \tag{14}$$

# 3. Untersuche die Primzahlen die $\binom{2n}{n}$ teilen.

C) Alle $p > \sqrt{2n}$ sind maximal ein Mal in $\binom{2n}{n}$ enthalten, da

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) = \left\lfloor\frac{2n}{p^1}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^1}\right\rfloor < 2. \tag{14}$$

D) Für $\frac{2}{3}n < p \leq n$ gilt $p \nmid \binom{2n}{n}$. Da gilt:

$$2n < 3p \Rightarrow kp \nmid (2n)!\,\forall k \geq 3 \tag{15}$$

und

$$p, p^2 \mid n!n! \tag{16}$$

D.h. $p$ wird als Teiler von $(2n)!$ durch $n!n!$ gekürzt.

# 4. Schätze $\binom{2n}{n}$ von oben und unten ab.

Sei nun $P(n) :=$ Anzahl der Primzahlen zwischen n und 2n. Mit den Schritten 2 und 3 folgt dann:

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \underset{\text{S. 3}}{\leq} \overset{(C)}{\prod_{p \leq \sqrt{2n}}} 2n \cdot \overset{(C),(D)}{\prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n}} p \cdot \overset{(D),(B)}{\prod_{n < p \leq 2n}} p \tag{17}$$

$$\underset{\text{S. 2}}{<} (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \cdot (2n)^{P(n)}. \tag{18}$$

# 4. Schätze $\binom{2n}{n}$ von oben und unten ab.

Sei nun $P(n) :=$ Anzahl der Primzahlen zwischen n und 2n. Mit den Schritten 2 und 3 folgt dann:

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \underset{\text{S. 3}}{\leq} \overset{(C)}{\prod_{p \leq \sqrt{2n}}} 2n \cdot \overset{(C),(D)}{\prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n}} p \cdot \overset{(D),(B)}{\prod_{n < p \leq 2n}} p \tag{17}$$

$$\underset{\text{S. 2}}{<} (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \cdot (2n)^{P(n)}. \tag{18}$$

Daraus folgt:

$$4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)}. \tag{19}$$

# 5. Zeige für $n \geq 512$ gilt $P(n) > 0$.

Wendet man $\log_2$ auf (19) an folgt:

$$\frac{n}{3}2 < (\sqrt{2n} + 1 + P(n)) \log_2(2n) \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{3\log_2(2n)} - \sqrt{2n} - 1 < P(n). \tag{21}$$

# 5. Zeige für $n \geq 512$ gilt $P(n) > 0$.

Wendet man $\log_2$ auf (19) an folgt:

$$\frac{n}{3}2 < (\sqrt{2n} + 1 + P(n)) \log_2(2n) \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{3 \log_2(2n)} - \sqrt{2n} - 1 < P(n). \tag{21}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass für $n \geq 2^9 = 512$ der linke Term positiv ist. Zeige dafür $\sqrt{2n} - 1 > 3 \log_2(2n)$, da dies äquivalent ist zu:

# 5. Zeige für $n \geq 512$ gilt $P(n) > 0$.

Wendet man $\log_2$ auf (19) an folgt:

$$\frac{n}{3}2 < (\sqrt{2n} + 1 + P(n)) \log_2(2n) \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{3 \log_2(2n)} - \sqrt{2n} - 1 < P(n). \tag{21}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass für $n \geq 2^9 = 512$ der linke Term positiv ist. Zeige dafür $\sqrt{2n} - 1 > 3 \log_2(2n)$, da dies äquivalent ist zu:

$$\frac{2n - 1}{\sqrt{2n} + 1} > 3 \log_2(2n) \tag{22}$$

$$\Leftrightarrow 2n > 2n - 1 > (\sqrt{2n} + 1) 3 \log_2(2n) \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{3 \log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1) > 0. \tag{24}$$

# 5. Zeige für $n \geq 512$ gilt $P(n) > 0$.

Nun gilt für $n = 2^9$:

$$\sqrt{2 \cdot 2^n} - 1 = 31 > 30 = 3 \log_2(2 \cdot 2^9). \tag{25}$$

Außerdem ist an den Ableitungen der Funktionen:

$$f'(x) := (\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ g'(x) := (3 \log_2(x))' = \frac{3}{log(2)} x^{-1} \tag{26}$$

zu erkennen, dass $f$ ab $x > 75$ schneller wächst als $g$.

# 5. Zeige für $n \geq 512$ gilt $P(n) > 0$.

Nun gilt für $n = 2^9$:

$$\sqrt{2 \cdot 2^n} - 1 = 31 > 30 = 3\log_2(2 \cdot 2^9). \tag{25}$$

Außerdem ist an den Ableitungen der Funktionen:

$$f'(x) := (\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ g'(x) := (3\log_2(x))' = \frac{3}{log(2)}x^{-1} \tag{26}$$

zu erkennen, dass $f$ ab $x > 75$ schneller wächst als $g$. Also gilt insbesondere

$$0 < \frac{2n}{3\log_2(2n)} - \sqrt{2n} - 1 < P(n) \tag{27}$$

für alle $n \geq 512$. Und damit ist das Postulat bewiesen.

∎

## Literatur

[1] Pafnuti lwowitsch tschebyschow, Oktober 2010. URL *https://de.wikipedia.org/wiki/Pafnuti_Lwowitsch_Tschebyschow*.

[2] Joseph bertrand, Juni 2021. URL *https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_Bertrand*.

[3] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise*. Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2018.