Tafelnotizen für den Proseminar-Vortrag von Paula Wiesner am 29.11.2018

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$
$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$
$$e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{i!}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a-1}$$

e irrational

angenommen, es gilt: $e = \frac{a}{b}$

dann gilt auch: $e \cdot b = a$

und $n! \cdot e \cdot b = a \cdot n!$

$a \cdot n! \in \mathbb{N}$ gilt offensichtlich

Da gilt: $e = (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}) + (\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ...)$

gilt auch $b \cdot (1 + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + ... + \frac{n!}{n!}) + b \cdot (\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + ...)$

erster Teil offensichtlich $\in \mathbb{N}$

Abschätzung zweiter Teil: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + ... = \frac{1}{n}$ nach Abschätzung über die geometrische Reihe

$\Rightarrow$ zweiter Teil ungefähr $\frac{b}{n}$ $\Rightarrow$ zweiter Teil nicht in $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ Widerspruch

e^2 irrational

stärkere Aussage als e irrational, z.B. $\sqrt{2}$ irrational, $\sqrt{2}^2$ aber nicht

Angenommen, es gilt $e^2 = \frac{a}{b}$

dann gilt $n! \cdot b \cdot e = n! \cdot a \cdot e^{-1}$ also gilt nach den Definitionen:

$n! \cdot b(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}) = n! \cdot a(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!})$

erster Teil (wie beim vorherigen Beweis gezeigt) etwas größer als eine ganze Zahl

zweiter Teil lässt sich umschreiben als:

$a \cdot n \cdot e^{-1} = a(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!}) + a(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{n!}{(n+i)!})$

Für $n \in 2\mathbb{N}$ gilt für den zweiten Teil:

$-\frac{a}{n} < a(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \mp ...) < -a(\frac{1}{n+1} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^i}) = -\frac{a}{n+1}(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^i}) < -\frac{a}{n+1}(n - \frac{1}{n}) < 0$ letzter Schritt: Konvergenz der geometrischen Reihe

$\Rightarrow a \cdot n \cdot e^{-1}$ etwas kleiner als eine ganze Zahl $\Rightarrow$ Widerspruch

e^4 irrational

Hilfssatz: $n!$ enthält Primfaktor 2 höchstens $n-1$ mal

Beweis: Da $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, gilt $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ der Faktoren sind durch 2 teilbar, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ durch 4 usw also gilt Primfaktor 2 in n: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + ... + \lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor \leq n-1$

Gleichheit gilt genau für $n = 2^k$

Annahme $e^4 = \frac{a}{b}$

gilt, wenn $n! \cdot b \cdot e^2 = n! \cdot a \cdot e^{-2}$

$$n! \cdot b(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!}) = n! \cdot a(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{2^i}{i!}) \mid \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{n!}{2^{n-1}} \cdot b(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!}) = \frac{n!}{2^{n-1}} \cdot a(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{2^i}{i!})$$

$$b \cdot (\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^i}{2^{n-1} \cdot i!}) = a \cdot (\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{n! \cdot 2^i}{2^{n-1} \cdot i!})$$

$$b \cdot (\textstyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n! \cdot 2^i}{2^{n-1} \cdot i!}) + 2 \cdot b(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^i}{(n+1)!}) = a \cdot (\textstyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n! \cdot 2^i}{2^{n-1} \cdot i!}) + 2 \cdot a(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{n! \cdot 2^i}{(n+1)!})$$

Wegen des Hilfssatzes sind die ersten Teile der Summen ganze Zahlen

Wähle $n = 2^m$. Wie in vorheriger Abschätzung kann gezeigt werden, dass:

$2 \cdot b(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^i}{(n+1)!}) \sim \frac{4 \cdot b}{n}$ bzw

$2 \cdot a(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{n! \cdot 2^i}{(n+1)!}) \sim -\frac{4 \cdot a}{n}$

Für große n ist also der rechte Teil etwas größer als eine ganze Zahl, der linke etwas kleiner $\Rightarrow$ Widerspruch

e^r irrational für $r \neq 0$

$f(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$

1. $f(x)$ ist ein Polynom der Form $\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, dessen Koeffizienten c_i ganze Zahlen sind

2. Für $0 < x < 1$ ist $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$

3. Die Ableitungen $f^{(k)}(0)$ und $f^{(k)}(1)$ für $k \geq 0$ ganze Zahlen

Beweis des Hilfssatzes:

(i) und (ii) klar

(iii): $f^{(k)}(0) = x \cdot (...) = 0$ für $k < n$

$= \frac{k!}{n!} c_k \in \mathbb{N}$ für $n \leq k \leq 2 \cdot n$

$= 0$ für $2 \cdot n < k$ (alle Potenzen abgeleitet)

Da gilt: $f(x) = f(1-x) \Rightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot f^{(k)}(1-x)$

$\Rightarrow f^{(k)}(1) = (-1)^k \cdot f^{(k)}(0) \in \mathbb{N}$

genügt zu zeigen $e^s \notin \mathbb{Q}$, da falls $e^{\frac{s}{t}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (e^{\frac{s}{t}})^t = e^s \in \mathbb{Q}$

Angenommen $e^s = \frac{a}{b}$, $n! > a \cdot s^{2 \cdot n+1}$, f wie im Lemma

Betrachten $F(x) := \sum_{i=0}^{2 \cdot n} (-1)^i \cdot s^{2 \cdot n - i} f^{(i)}(x)$

$= F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot s^{2 \cdot n - i} f^{(i)}(x)$, da $f^{(k)}(x) = 0 \forall k > 2 \cdot n$

Ableitung: $F'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot s^{2 \cdot n - i} f^{(i+1)}(x)$

$F'(x) = -s \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot s^{2 \cdot n - i} f^{(i)}(x)$

$F'(x) = -s \cdot \sum_{i=0}^{\infty} ((-1)^i \cdot s^{2 \cdot n - i} f^{(i)}(x)) + s^{2 \cdot n+1} \cdot f(x)$

$F'(x) = -s \cdot F(x) + s^{2 \cdot n+1} \cdot f(x)$

Betrachten $\dfrac{d}{dx}[e^{s \cdot x} \cdot F(x)] = s \cdot e^{s \cdot x} \cdot F(x) + e^{s \cdot x} \cdot F'(x)$
$= s \cdot e^{s \cdot x} \cdot F(x) - s \cdot e^{s \cdot x} \cdot F(x) + e^{s \cdot x} \cdot s^{2 \cdot n+1} \cdot f(x)$
$= e^{s \cdot x} \cdot s^{2 \cdot n+1} \cdot f(x)$

$\Rightarrow N := b \cdot \int_0^1 e^{s \cdot x} \cdot s^{2 \cdot n+1} \cdot f(x) dx = b \cdot [e^{s \cdot x} \cdot F(x)]_0^1$
$= b \cdot e^s \cdot F(1) - b \cdot F(0) = a \cdot F(1) - b \cdot F(0)$

Für $N = a \cdot F(1) - b \cdot F(0)$ gilt:
$N \in \mathbb{N}$, wegen Lemma (iii)
Aus Lemma (ii) folgt:
$0 < N = b \cdot \int_0^1 e^{s \cdot x} \cdot s^{2 \cdot n+1} \cdot f(x) dx < b \cdot s^{2 \cdot n+1} \cdot e^s \cdot \dfrac{1}{n!} < \dfrac{a \cdot s^{2 \cdot n+1}}{n!} < 1 \Rightarrow$
Widerspruch

π^2 ist irrational

Sei $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, f wie im Lemma
Definieren $F(x) := b^n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \pi^{2 \cdot (n-i)} \cdot f^{(2i)}(x)$
$F''(x) = -\pi^2 \cdot F(x) + b^n \cdot \pi^{2 \cdot n+2} \cdot f(x)$

Nun betrachten wir folgende Funktion und ihre Ableitung:
$\dfrac{d}{dx}[F'(x) \cdot sin(\pi \cdot x) - \pi \cdot F(x) \cdot cos(\pi \cdot x)]$
Wegen Teil (ii) des Lemmas wissen wir, dass F(0) und F(1) ganze Zahlen

sind

$= (F''(x) + \pi^2 \cdot F(x))sin(\pi \cdot x)$

$= b^n \cdot \pi^{2 \cdot n+2} \cdot f(x) \cdot sin(\pi \cdot x)$

$= \pi^2 \cdot a^n \cdot f(x) \cdot sin(\pi \cdot x)$

Nun definieren wir folgendes Integral:

$N := \pi \int_0^1 a^n \cdot f(x) \cdot sin(\pi \cdot x)\ dx$

$= [\frac{1}{\pi} \cdot F'(x) \cdot sin(\pi \cdot x) - F(x) \cdot cos(\pi \cdot x)]$

$= F(0) + F(1)$

Dies ist ebenfalls eine ganze Zahl nach Lemma (iii) und positiv, da es über einer positiven Funktion definiert wurde.

Wähle nun n so groß, dass $\frac{\pi \cdot a^n}{n!} < 1$ gilt

Teil (ii) des Lemmas liefert nun:

$0 < N = \pi \int_0^1 a^n \cdot f(x) \cdot sin(\pi \cdot x)\ dx < \frac{\pi \cdot a^n}{n!} < 1$

$\Rightarrow$ Widerspruch