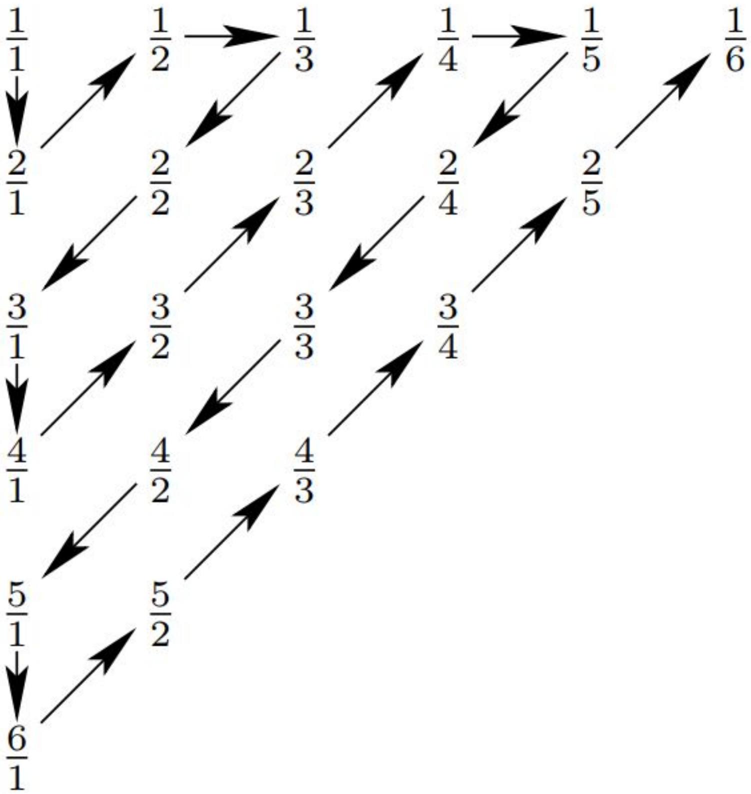
# Beweis über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

nach Calkin und Wilf

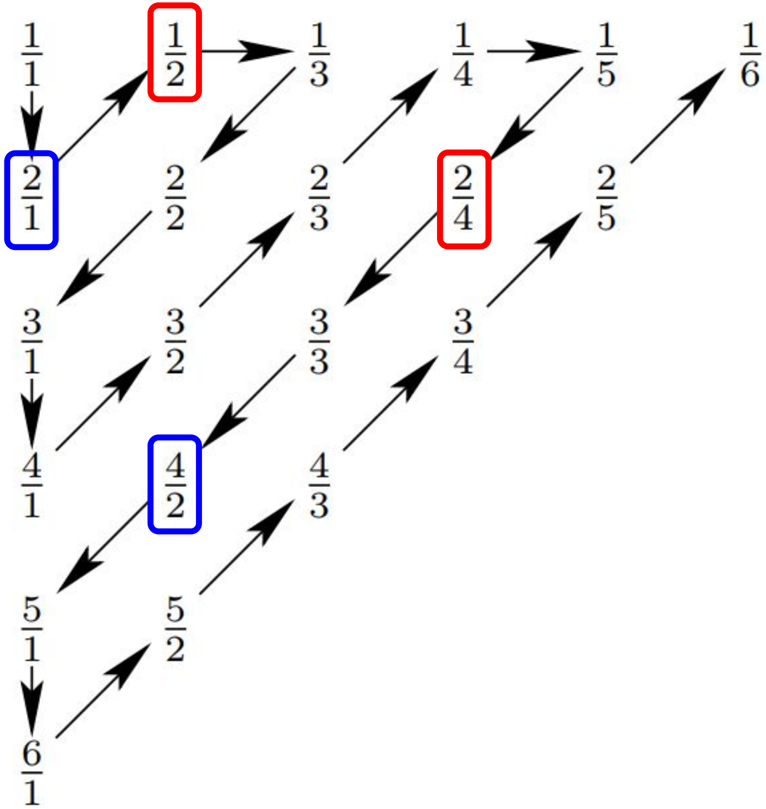
Jasper Wuhnsen

24.01.2019

**Beweis nach Cantor:**



**Beweis nach Cantor:**




nicht gekürzte Brüche
=> Duplikate

Aufzählung der positiven rationalen Zahlen

- Calkin & Wilf, veröffentlicht 1999

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots.$$

Aufzählung der positiven rationalen Zahlen

- Calkin & Wilf, veröffentlicht 1999

$$\frac{1}{\boxed{1}}, \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}, \frac{\boxed{2}}{\boxed{1}}, \frac{\boxed{1}}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \dots .$$

Nenner des n-ten Bruches = Zähler des (n+1)-ten Bruches

Aufzählung der positiven rationalen Zahlen

- Calkin & Wilf, veröffentlicht 1999

$$\frac{1}{\boxed{1}}, \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}, \frac{\boxed{2}}{\boxed{1}}, \frac{\boxed{1}}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots .$$

Nenner des n-ten Bruches = Zähler des (n+1)-ten Bruches

n-te Bruch: $$\frac{b(n)}{b(n+1)}$$

Aufzählung der positiven rationalen Zahlen

- Calkin & Wilf, veröffentlicht 1999

$$\frac{1}{\boxed{1}}, \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}, \frac{\boxed{2}}{\boxed{1}}, \frac{\boxed{1}}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots .$$

Nenner des n-ten Bruches = Zähler des (n+1)-ten Bruches

n-te Bruch: $$\frac{b(n)}{b(n+1)}$$

Mit Folge $(b_n)_{(n \geq 0)}$: 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, … (Moritz Abraham Stern 1858)

**Aufstellung der Brüche durch:**

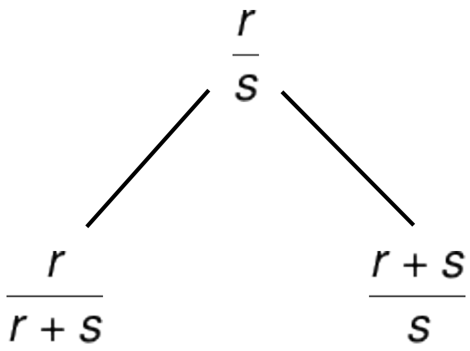
Unendlichen vollständigen Binärbaum

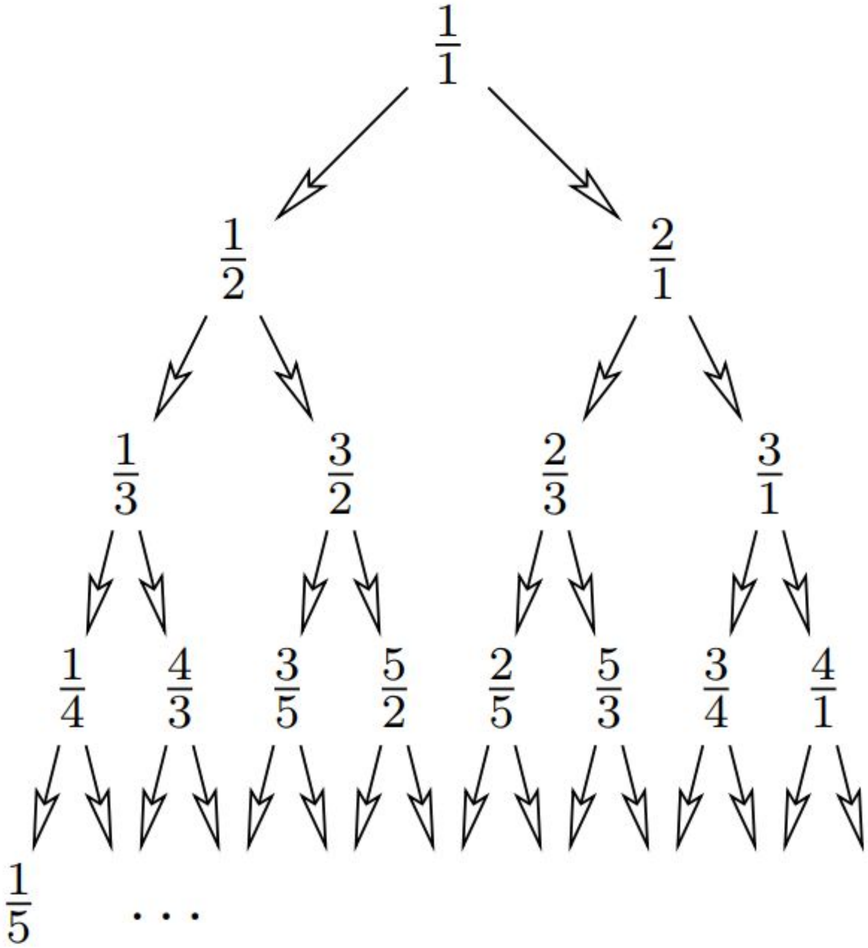
- eine Wurzel ($\frac{1}{1}$)
- Jeder Knoten hat genau 2 Kinder
- Jedes Kind hat genau ein Elternteil
- => Jedes Kind kann entweder ein linkes oder rechtes Kind sein

**Aufstellung der Brüche durch:**
Unendlichen vollständigen Binärbaum

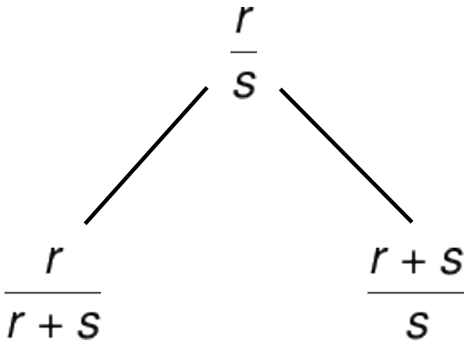
- eine Wurzel $(\frac{1}{1})$
- Jeder Knoten hat genau 2 Kinder
- Jedes Kind hat genau ein Elternteil
- => Jedes Kind kann entweder ein linkes oder rechtes Kind sein

## Mit Bildungsvorschrift:





$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{1}$
$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{1}$
$\frac{1}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{1}$
$\frac{1}{5}$ $\cdots$

$\frac{r}{s}$
$\frac{r}{r+s}$ $\frac{r+s}{s}$

## Zu zeigen:

(1) Alle Brüche im Baum sind gekürzt

(2) Jeder gekürzte positive Bruch ist im Baum vorhanden

(3) Jeder gekürzte positive Bruch tritt nur einmal im Baum auf

(4) Nenner des n-ten Bruches ist gleich dem Zähler des (n+1)-ten Bruches

**Beweis (1):** Alle Brüche im Baum sind gekürzt. Für alle $\frac{r}{s}$ im Baum sind r und s teilerfremd. ggT(r,s) = 1

Beweis per Induktion.

**Beweis (1):** Alle Brüche im Baum sind gekürzt. Für alle $\frac{r}{s}$ im Baum sind r und s teilerfremd. ggT(r,s) = 1

Beweis per Induktion.

I.A: $\frac{1}{1}$ ggT(1,1) = 1

**Beweis (1):** Alle Brüche im Baum sind gekürzt. Für alle $\frac{r}{s}$ im Baum sind r und s teilerfremd. ggT(r,s) = 1

Beweis per Induktion.

I.A: $\frac{1}{1}$ ggT(1,1) = 1

I.V: gilt für $\frac{r}{s}$: ggT(r,s) = 1

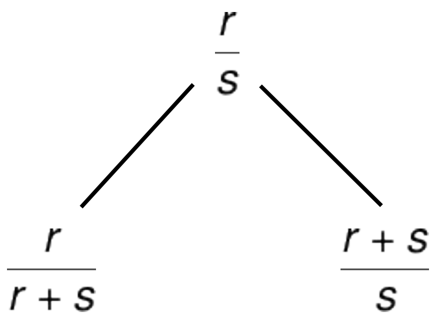
**Beweis (1):** Alle Brüche im Baum sind gekürzt. Für alle $\frac{r}{s}$ im Baum sind r und s teilerfremd. ggT(r,s) = 1

Beweis per Induktion.

I.A: $\frac{1}{1}$ ggT(1,1) = 1

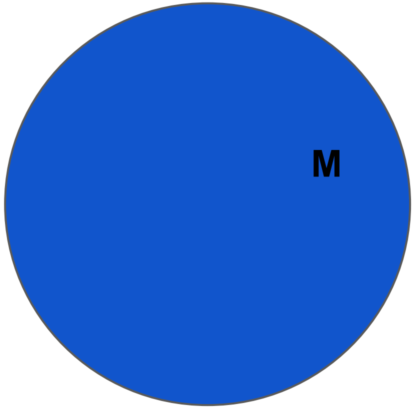
I.V: gilt für $\frac{r}{s}$: ggT(r,s) = 1

I.S: Tafel

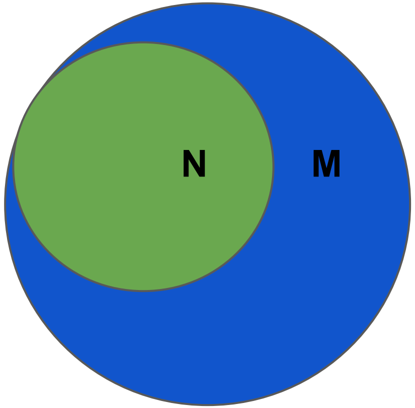


**Beweis (2):** Jeder gekürzte Bruch $\frac{r}{s} > 0$ ist im Baum vorhanden.
Beweis per Widerspruch.

**Beweis (2):** Jeder gekürzte Bruch $\frac{r}{s} > 0$ ist im Baum vorhanden.
Beweis per Widerspruch.
**M** := Menge aller positiven gekürzten Brüche die **nicht** im Baum vorhanden sind

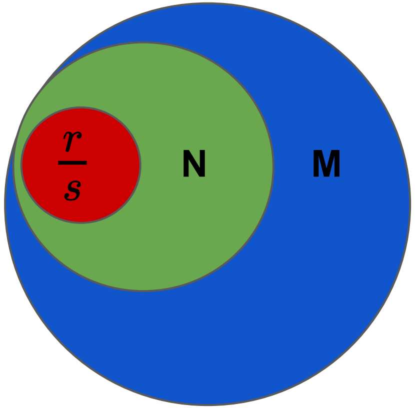


**Beweis (2):** Jeder gekürzte Bruch $\frac{r}{s} > 0$ ist im Baum vorhanden.
Beweis per Widerspruch.
**M** := Menge aller positiven gekürzten Brüche die **nicht** im Baum vorhanden sind




**N** := Menge der Brüche mit dem kleinsten Nenner
und $N \subseteq M$

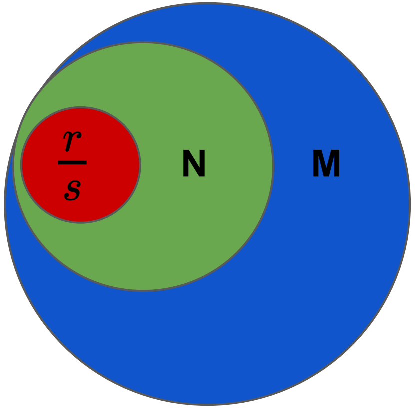
**Beweis (2):** Jeder gekürzte Bruch $\frac{r}{s} > 0$ ist im Baum vorhanden.
Beweis per Widerspruch.
**M** := Menge aller positiven gekürzten Brüche die **nicht** im Baum vorhanden sind




**N** := Menge der Brüche mit dem kleinsten Nenner und $N \subseteq M$

$\frac{r}{s}$ : Bruch aus N mit dem kleinsten Zähler.

**Beweis (2):** Jeder gekürzte Bruch $\frac{r}{s} > 0$ ist im Baum vorhanden.
Beweis per Widerspruch.
**M** := Menge aller positiven gekürzten Brüche die **nicht** im Baum vorhanden sind




**N** := Menge der Brüche mit dem kleinsten Nenner
und $N \subseteq M$

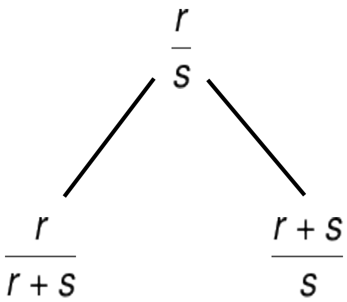
$\frac{r}{s}$ : Bruch aus N mit dem kleinsten Zähler.

**Bsp.** $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ alle **nicht** im Baum vorhanden

erst kleinsten Nenner: 5
dann kleinsten Zähler: 3

=> $\frac{r}{s} = \frac{3}{5}$

Beweis: Tafel



**Beweis (3):** Jeder gekürzte Bruch $\frac{r}{s} > 0$ tritt nur einmal im Baum auf.

Beweis per Widerspruch.

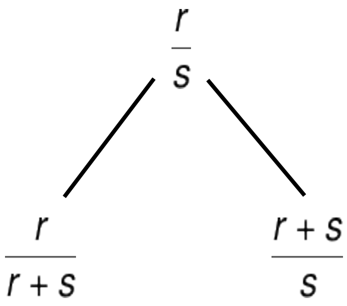
Konstruktion von $\frac{r}{s}$ ähnlich wie bei Beweis (2)

**M** := Menge aller positiven gekürzten Brüche die **mehr als einmal** im Baum auftreten.

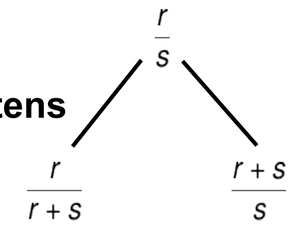
**N** := Menge der Brüche mit dem kleinsten Nenner
und $N \subseteq M$

$\dfrac{r}{s}$ : Bruch aus N mit dem kleinsten Zähler.

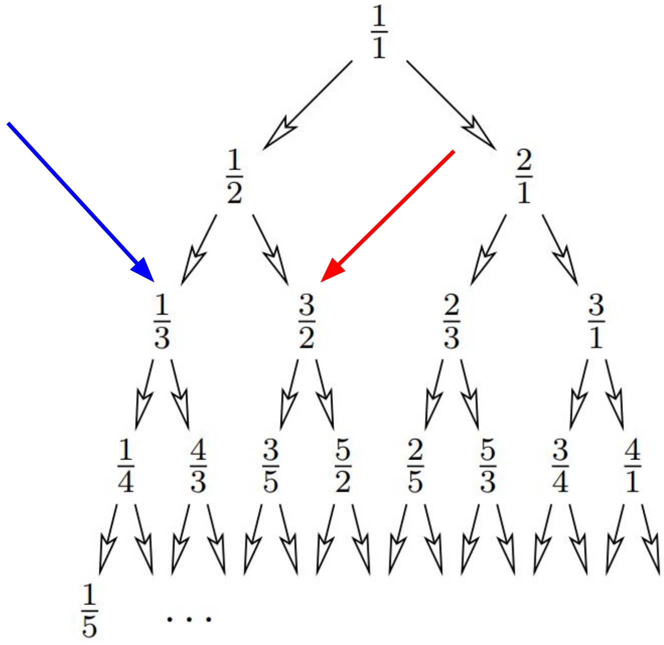
Beweis: Tafel



**Beweis (4):** Der Nenner des n-ten Bruches ist der Zähler des (n+1)-ten Bruches.

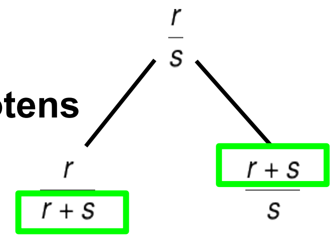


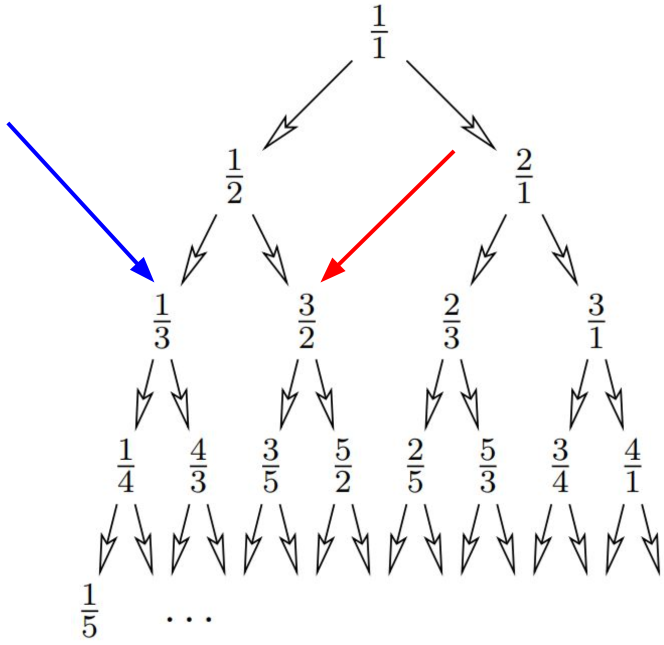

1. **Fall: Der n-te und (n+1)-te Bruch sind beides Kinder des selben Eltern-Knotens**



**Beweis (4):** Der Nenner des n-ten Bruches ist der Zähler des (n+1)-ten Bruches.

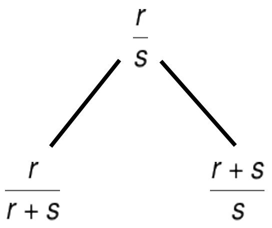
1. **Fall: Der n-te und (n+1)-te Bruch sind beides Kinder des selben Eltern-Knotens**



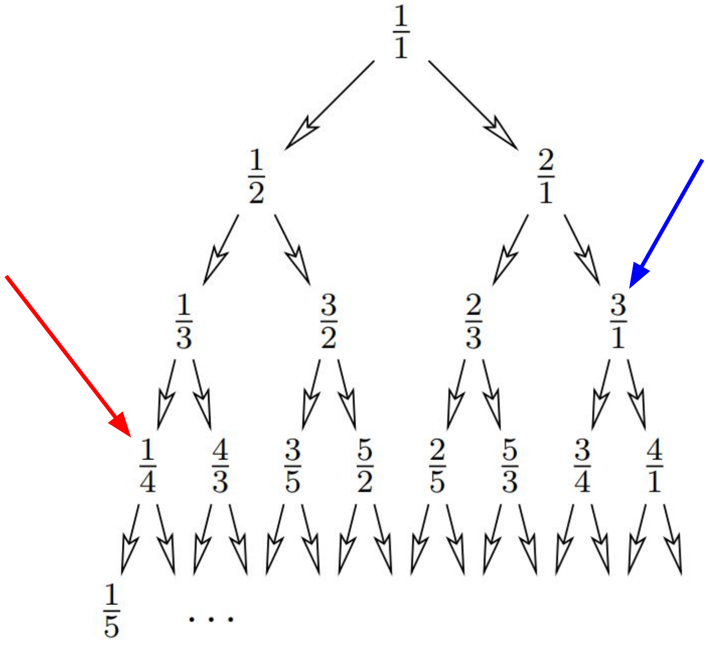



**Beweis (4):** Der Nenner des n-ten Bruches ist der Zähler des (n+1)-ten Bruches.

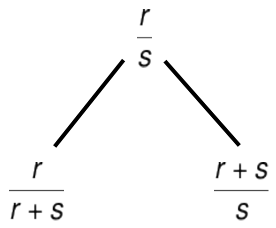
1. Fall: Der n-te und (n+1)-te Bruch sind beides Kinder des selben Eltern-Knotens




2. **Fall: der n-te Bruch ist ein rechtes Kind und tritt ganz rechts im Baum auf**

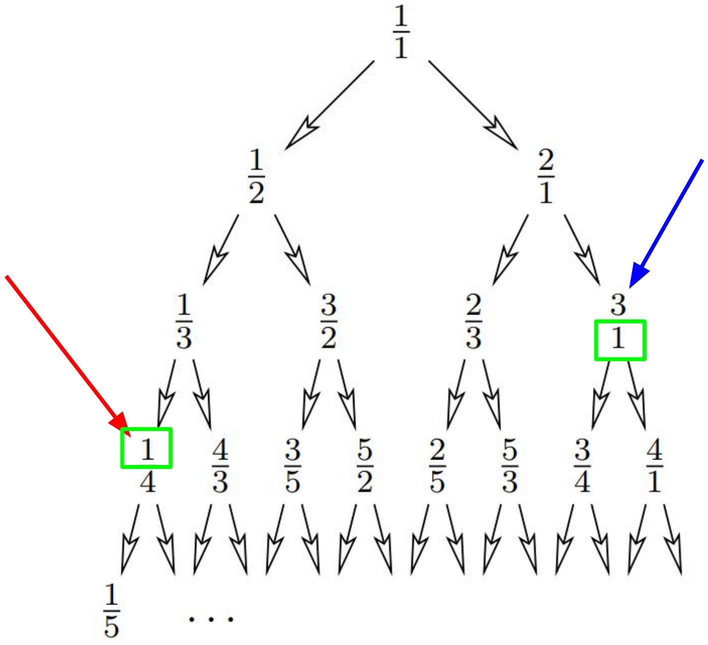


**Beweis (4):** Der Nenner des n-ten Bruches ist der Zähler des (n+1)-ten Bruches.

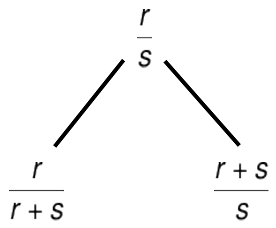



1. Fall: Der n-te und (n+1)-te Bruch sind beides Kinder des selben Eltern-Knotens

2. **Fall: der n-te Bruch ist ein rechtes Kind und tritt ganz rechts im Baum auf**



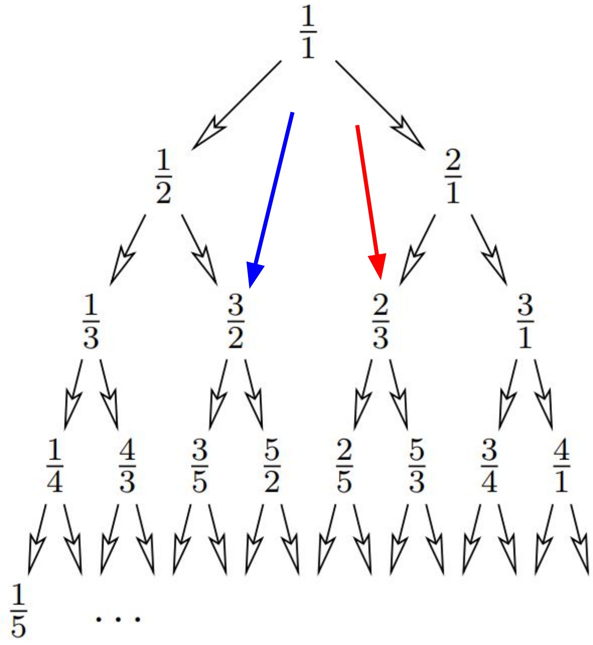
**Beweis (4):** Der Nenner des n-ten Bruches ist der Zähler des (n+1)-ten Bruches.



1. Fall: Der n-te und (n+1)-te Bruch sind beides Kinder des selben Eltern-Knotens

2. Fall: der n-te Bruch ist ein rechtes Kind und tritt ganz rechts im Baum auf

3. **Fall: der n-te Bruch ist ein rechtes Kind und tritt innerhalb des Baumes auf** (Beweis: Tafel)



## Was haben wir gezeigt?

$$\begin{tikzcd} & \frac{r}{s} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \frac{r}{r+s} & & \frac{r+s}{s} \end{tikzcd}$$

Der vollständige Binärbaum mit der Wurzel $\frac{1}{1}$ und der Bildungsvorschrift gelesen mit Breitensuche liefert die komplette Aufzählung der rationalen Zahlen nach Calkin und Wilf.
Alle Brüche im Baum sind gekürzt und kommen genau einmal vor.

**Weiterführende Frage:**

Gibt es einen Weg aus dem Bruch $\frac{r}{s}$ den nächsten Bruch der Aufzählung zu berechnen?

Wir suchen eine Funktion um aus einem gegebenen Bruch den nächsten in der Liste zu berechnen.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots .$$

Wir suchen eine Funktion um aus einem gegebenen Bruch den nächsten in der Liste zu berechnen.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots .$$

$$\begin{tikzcd} & \frac{r}{s} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \frac{r}{r+s} & & \frac{r+s}{s} \end{tikzcd}$$

$$\frac{r}{s} = x$$

Wir suchen eine Funktion um aus einem gegebenen Bruch den nächsten in der Liste zu berechnen.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots .$$

$$\begin{tikzcd} & \frac{r}{s} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \frac{r}{r+s} & & \frac{r+s}{s} \end{tikzcd}$$

$$\frac{r}{s} = x$$

$$\frac{r}{r+s} = \frac{x}{x+1}$$

(Beweis: Tafel)

Wir suchen eine Funktion um aus einem gegebenen Bruch den nächsten in der Liste zu berechnen.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots .$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \frac{r}{s} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \frac{r}{r+s} & & \frac{r+s}{s} \end{tikzcd}$$

$$\frac{r}{s} = x$$

$$\frac{r}{r+s} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{r+s}{s} = x + 1$$

Wir suchen eine Funktion um aus einem gegebenen Bruch den nächsten in der Liste zu berechnen.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \dots .$$

$$\begin{tikzcd} & \frac{r}{s} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \frac{r}{r+s} & & \frac{r+s}{s} \end{tikzcd}$$

$$\frac{r}{s} = x$$

$$\frac{r}{r+s} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{r+s}{s} = x + 1$$

neue Bildungsvorschrift:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \frac{x}{x+1} & & x+1 \end{tikzcd}$$

Wir suchen eine Funktion um aus einem gegebenen Bruch den nächsten in der Liste zu berechnen.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots .$$

$$\frac{r}{s}$$

$$\frac{r}{r+s} \qquad \frac{r+s}{s}$$

$$\frac{r}{s} = x$$

$$\frac{r}{r+s} = \frac{x}{x+1}$$

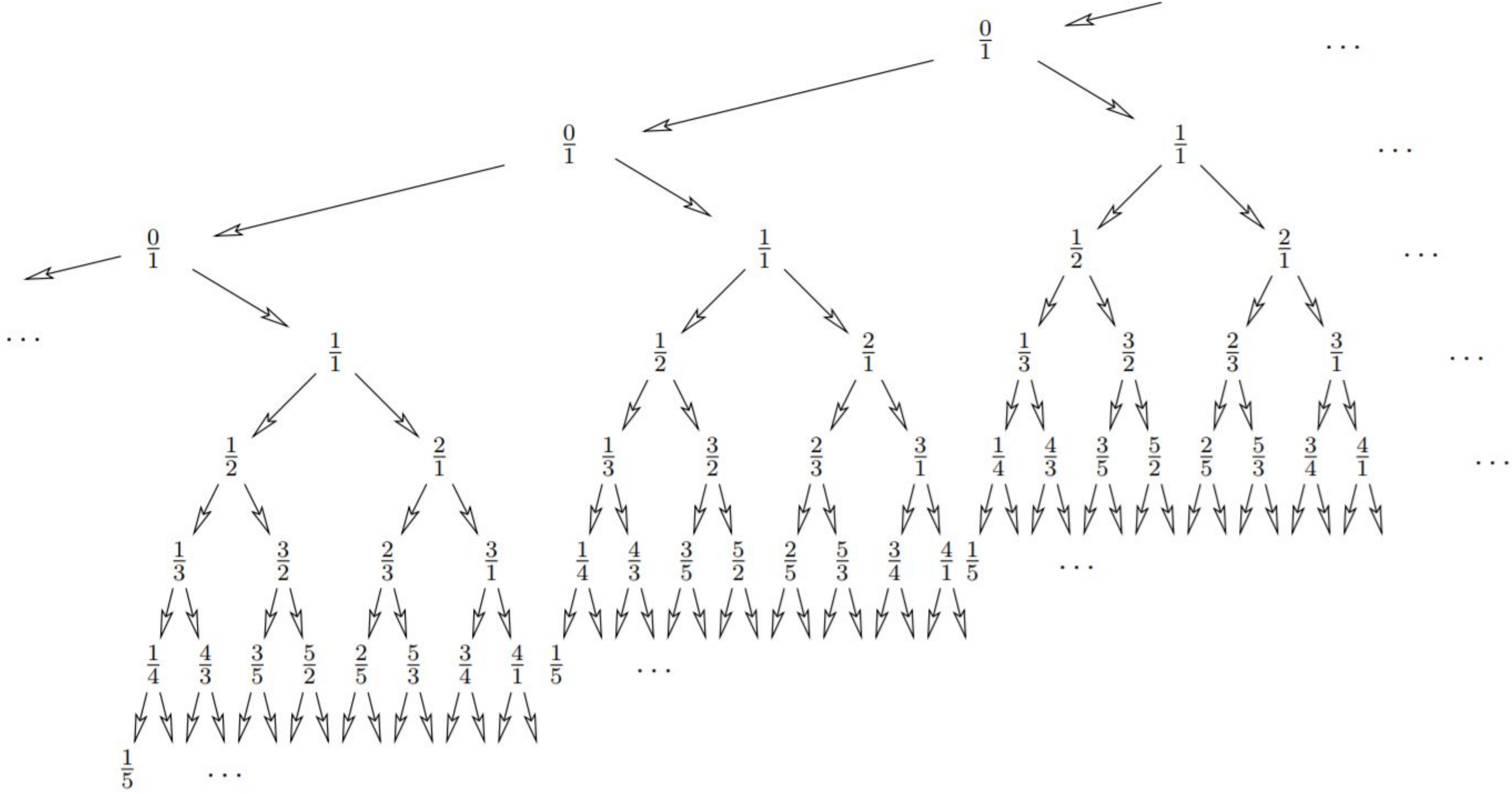
$$\frac{r+s}{s} = x+1$$

neue Bildungsvorschrift:

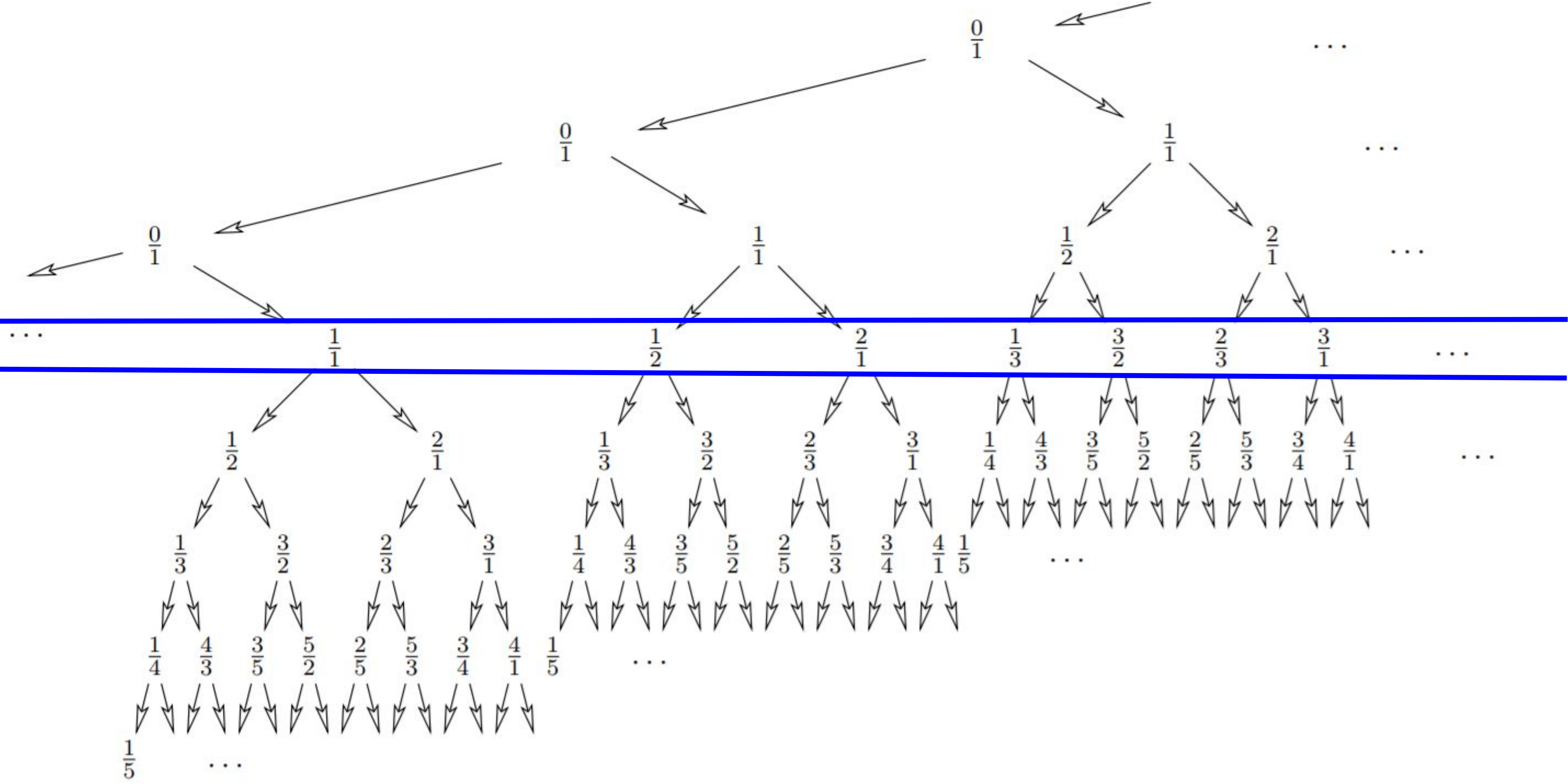
$$x$$

$$\frac{x}{x+1} \qquad x+1$$

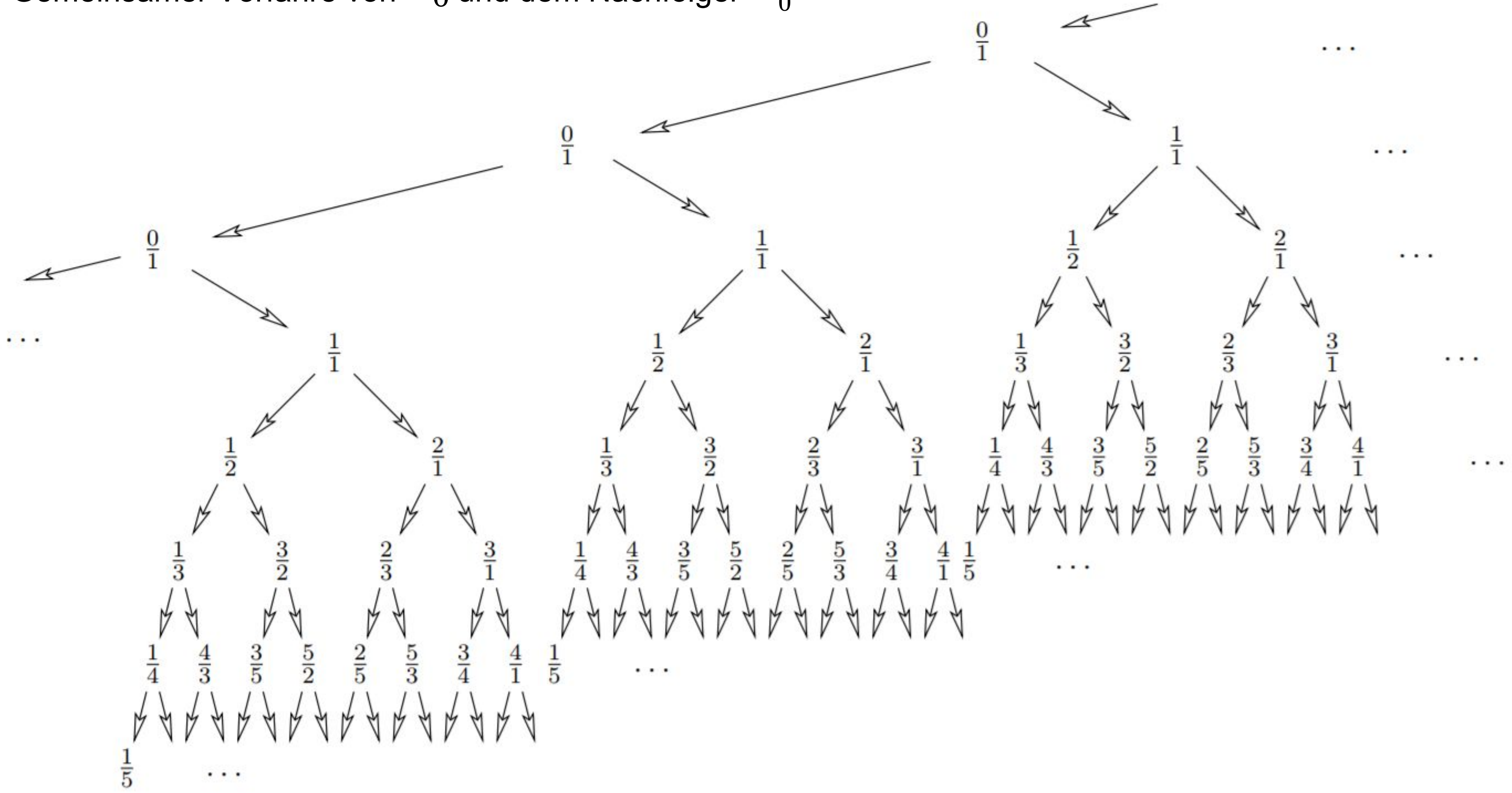
Damit erzeugen wir einen unendlichen vollständigen Binärbaum **ohne Wurzel**



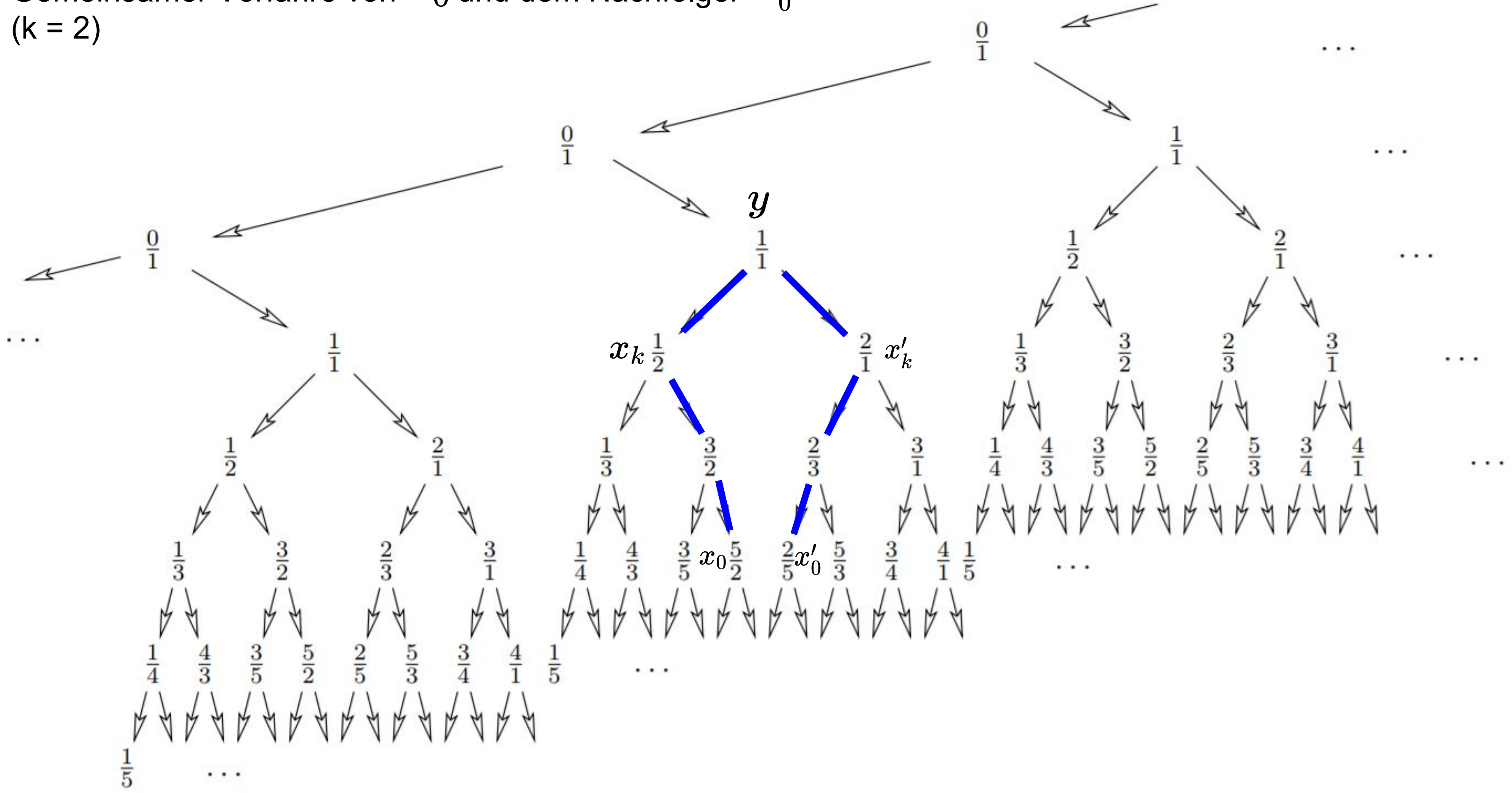
Jede Zeile: Calkin-Wilf Aufzählung der rationalen Zahlen



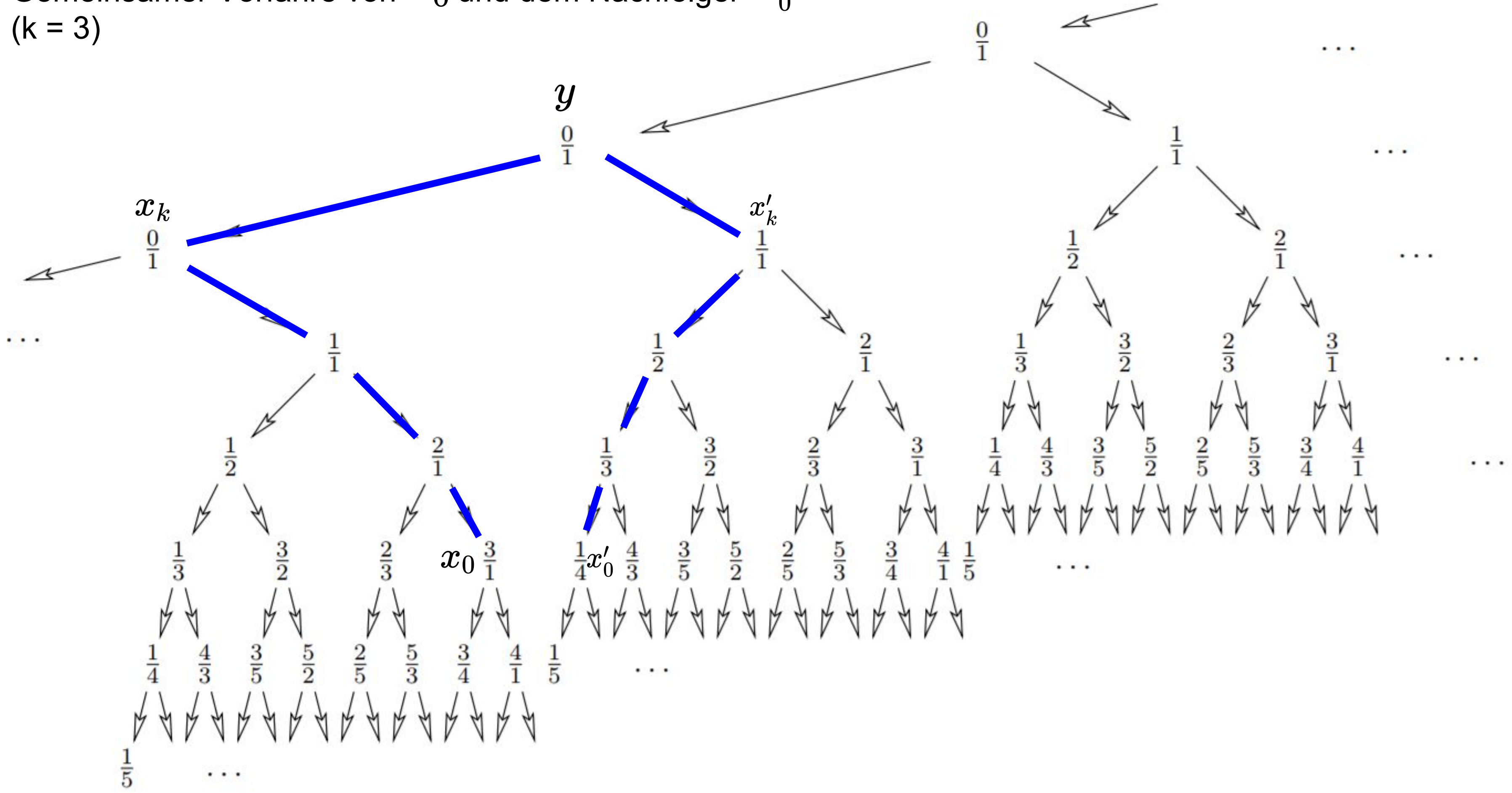
Gemeinsamer Vorfahre von $x_0$ und dem Nachfolger $x_0'$



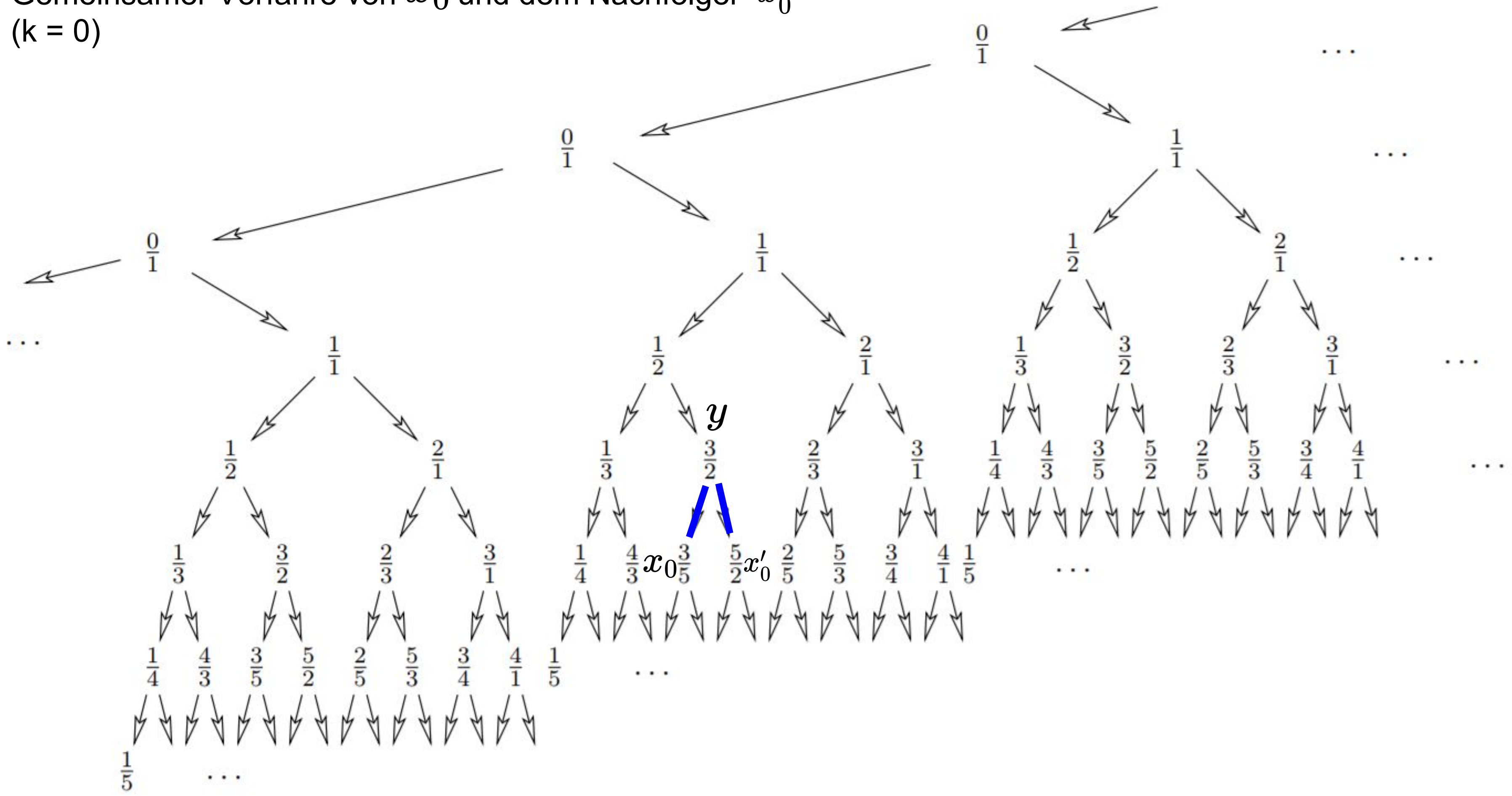
Gemeinsamer Vorfahre von $x_0$ und dem Nachfolger $x_0'$
(k = 2)



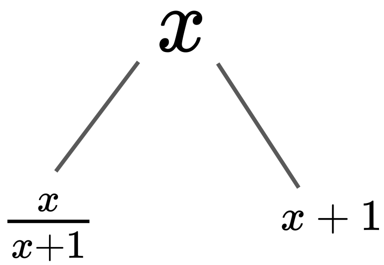
Gemeinsamer Vorfahre von $x_0$ und dem Nachfolger $x'_0$
(k = 3)



Gemeinsamer Vorfahre von $x_0$ und dem Nachfolger $x_0'$
(k = 0)

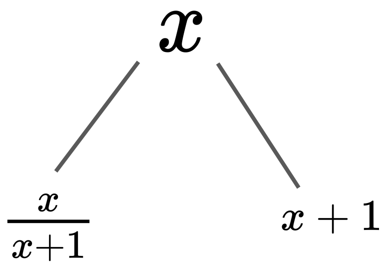


**Behauptung:** Das k-fache linke Kind von eines beliebigen Knotens x ist $\dfrac{x}{1+kx}$




Beweis per Induktion:

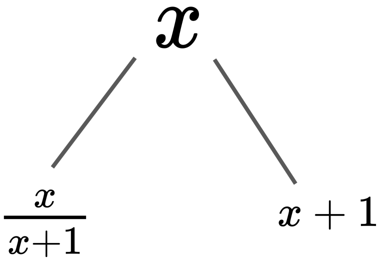
**Behauptung:** Das k-fache linke Kind von eines beliebigen Knotens x ist $\frac{x}{1+kx}$




Beweis per Induktion:

I.A: $x = \frac{0}{1}$ => $\frac{0}{1+k*0} = 0$

**Behauptung:** Das k-fache linke Kind von eines beliebigen Knotens x ist $\frac{x}{1+kx}$

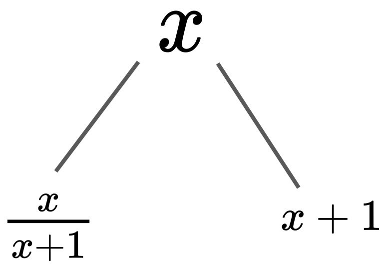



Beweis per Induktion:

I.A: $x = \frac{0}{1}$ => $\frac{0}{1+k*0} = 0$

I.V: Die Formel gilt für k

**Behauptung:** Das k-fache linke Kind von eines beliebigen Knotens x ist $\frac{x}{1+kx}$



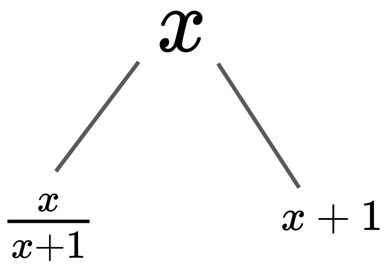

Beweis per Induktion:

I.A: $x = \frac{0}{1}$ => $\frac{0}{1+k*0} = 0$

I.V: Die Formel gilt für k

I.S: Das linke Kind von $\frac{x}{1+kx}$ ist das (k+1) fache linke Kind von x

**Behauptung:** Das k-fache linke Kind von eines beliebigen Knotens x ist $\frac{x}{1+kx}$




Beweis per Induktion:

I.A: $x = \frac{0}{1}$ => $\frac{0}{1+k*0} = 0$

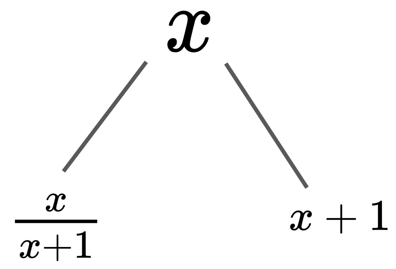
I.V: Die Formel gilt für k

I.S: Das linke Kind von $\frac{x}{1+kx}$ ist das (k+1) fache linke Kind von x

Bildungsvorschrift für linkes Kind: $\frac{x}{x+1}$

Einsetzen und ausrechnen (Tafel):

**Behauptung:** Das k-fache linke Kind von eines beliebigen Knotens x ist $\frac{x}{1+kx}$




Beweis per Induktion:

I.A: $x = \frac{0}{1}$ => $\frac{0}{1+k*0} = 0$

I.V: Die Formel gilt für k

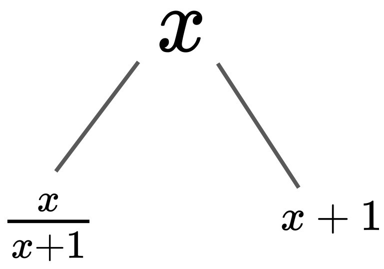
I.S: Das linke Kind von $\frac{x}{1+kx}$ ist das (k+1) fache linke Kind von x

Bildungsvorschrift für linkes Kind: $\frac{x}{x+1}$

Einsetzen und ausrechnen (Tafel):

$$\frac{x}{1+(k+1)x}$$

**Behauptung:** Das k-fache linke Kind von eines beliebigen Knotens x ist $\frac{x}{1+kx}$




Beweis per Induktion:

I.A: $x = \frac{0}{1}$ => $\frac{0}{1+k*0} = 0$

I.V: Die Formel gilt für k

I.S: Das linke Kind von $\frac{x}{1+kx}$ ist das (k+1) fache linke Kind von x

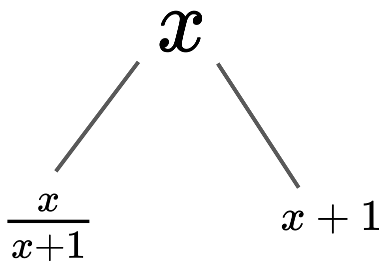
Bildungsvorschrift für linkes Kind: $\frac{x}{x+1}$

Einsetzen und ausrechnen (Tafel):

$$\frac{x}{1+(k+1)x}$$

Das k-fache rechte Kind eines beliebigen Knotens x ist $x + k$

**Behauptung:** Das k-fache linke Kind von eines beliebigen Knotens x ist $\frac{x}{1+kx}$




Beweis per Induktion:

I.A: $x = \frac{0}{1}$ => $\frac{0}{1+k*0} = 0$

I.V: Die Formel gilt für k

I.S: Das linke Kind von $\frac{x}{1+kx}$ ist das (k+1) fache linke Kind von x

Bildungsvorschrift für linkes Kind: $\frac{x}{x+1}$

Einsetzen und ausrechnen (Tafel):

$$\frac{x}{1+(k+1)x}$$

Das k-fache rechte Kind eines beliebigen Knotens x ist $x + k$

Beweis: folgt trivial aus Bildungsvorschrift

**Wir suchen:** f sodass $f(x_0) = x_0'$ mit $x_0'$ Nachfolger von $x_0$

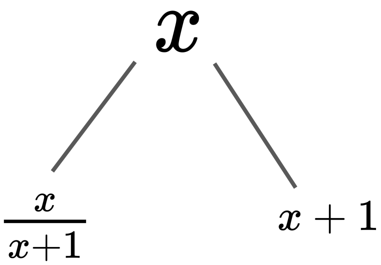
gemeinsamer Vorfahre

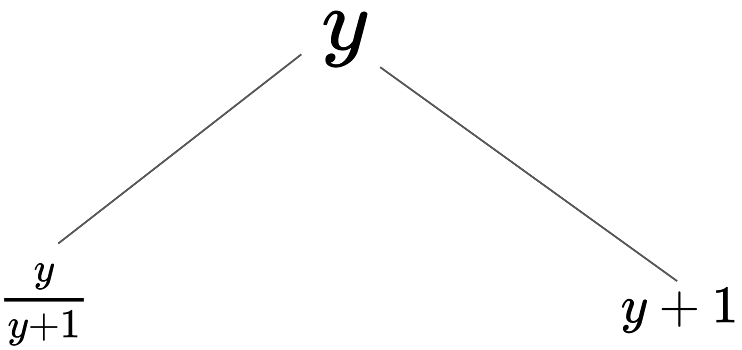
$y$

$$x$$

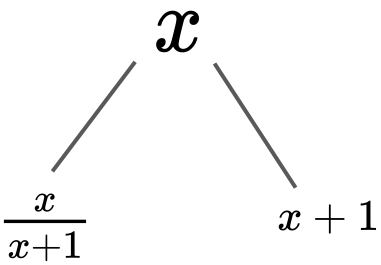
$$\frac{x}{x+1} \qquad x+1$$

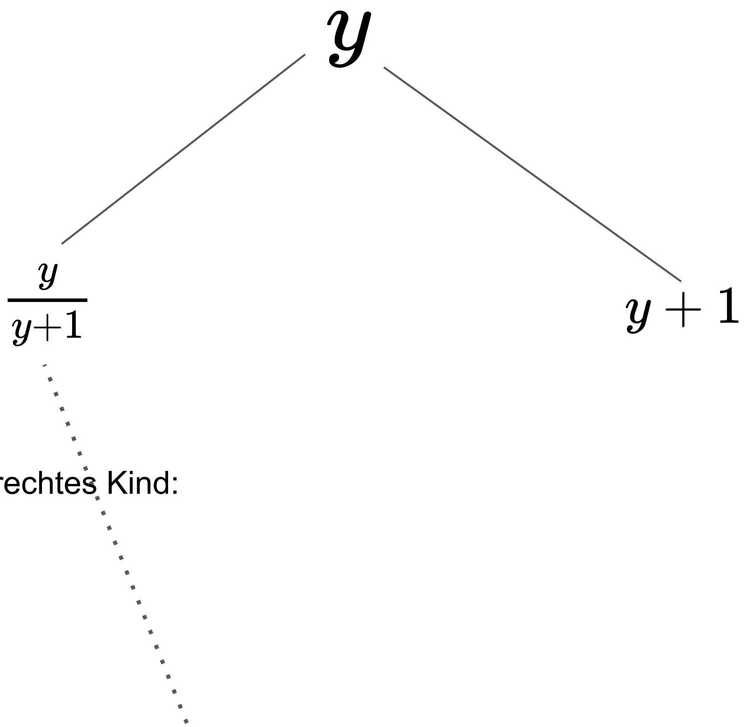
**Wir suchen:** f sodass $f(x_0) = x_0'$ mit $x_0'$ Nachfolger von $x_0$



**Wir suchen:** f sodass $f(x_0) = x_0'$ mit $x_0'$ Nachfolger von $x_0$




k-faches rechtes Kind:

$x + k$

**Wir suchen:** f sodass $f(x_0) = x_0'$ mit $x_0'$ Nachfolger von $x_0$

$$x$$

$$\frac{x}{x+1} \qquad x+1$$

$$y$$

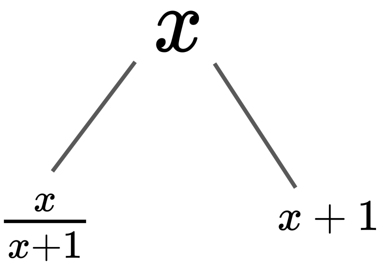
$$\frac{y}{y+1} \qquad y+1$$

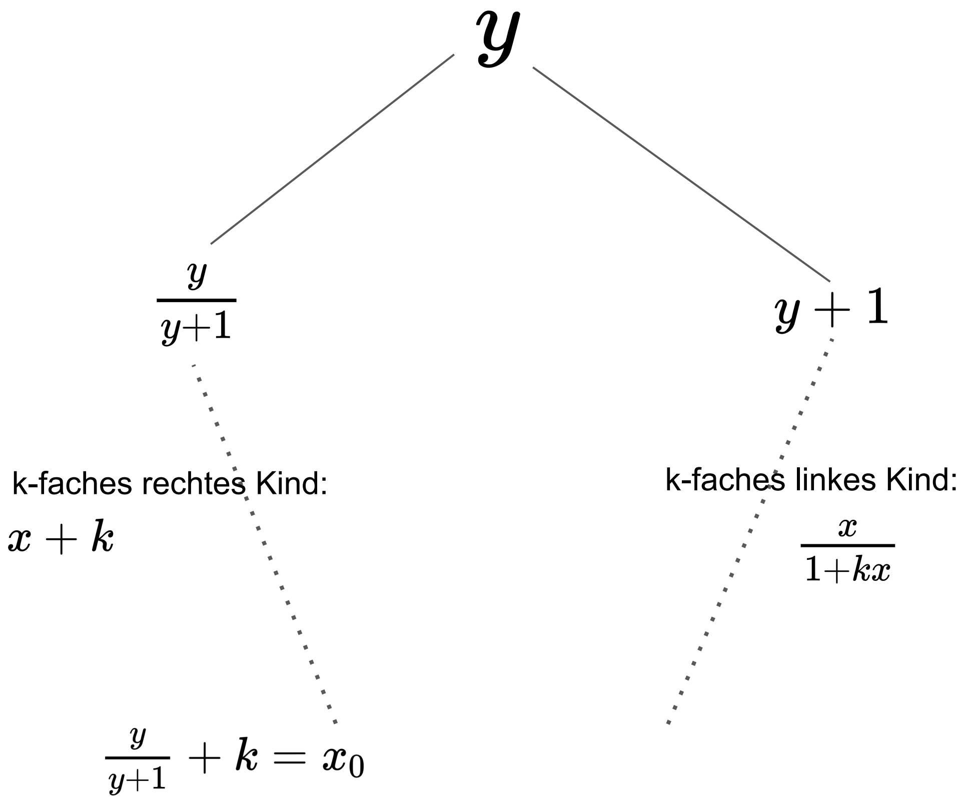
k-faches rechtes Kind:

$x + k$

$$\frac{y}{y+1} + k = x_0$$

**Wir suchen:** f sodass $f(x_0) = x_0'$ mit $x_0'$ Nachfolger von $x_0$



**Wir suchen:** f sodass $f(x_0) = x_0'$ mit $x_0'$ Nachfolger von $x_0$

$x$

$\frac{x}{x+1}$ $x+1$

$y$

$\frac{y}{y+1}$ $y+1$

k-faches rechtes Kind:

$x + k$

k-faches linkes Kind:

$\frac{x}{1+kx}$

$\frac{y}{y+1} + k = x_0$

$x_0' = \frac{y+1}{1+k(y+1)}$

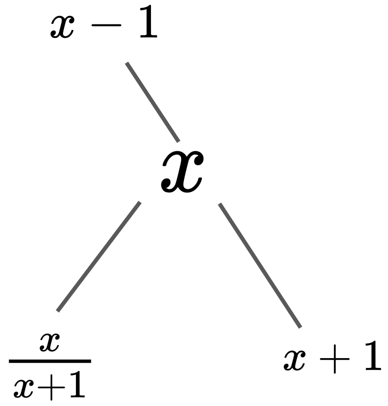
## Was ist k?

Behauptung: k = $\lfloor x \rfloor$

**Was ist k?**

Behauptung: k = $\lfloor x \rfloor$

1. Zu zeigen: jedes linke Kind x < 1



**Was ist k?**

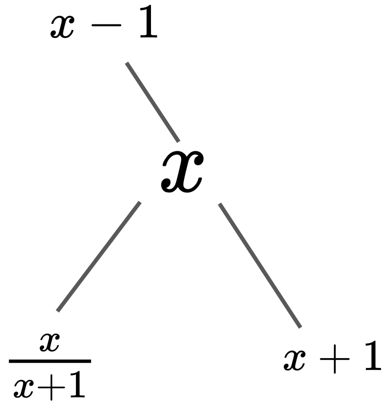
Behauptung: k = $\lfloor x \rfloor$

1. Zu zeigen: jedes linke Kind x < 1

   $\frac{x}{x+1}$ <- Bildungsvorschrift für das linke Kind von x

   da $x \geq 0$ und $x < x + 1$ für alle x, folgt direkt

   für jedes linke Kind x: $0 \leq x < 1$



**Was ist k?**

Behauptung: k = $\lfloor x \rfloor$

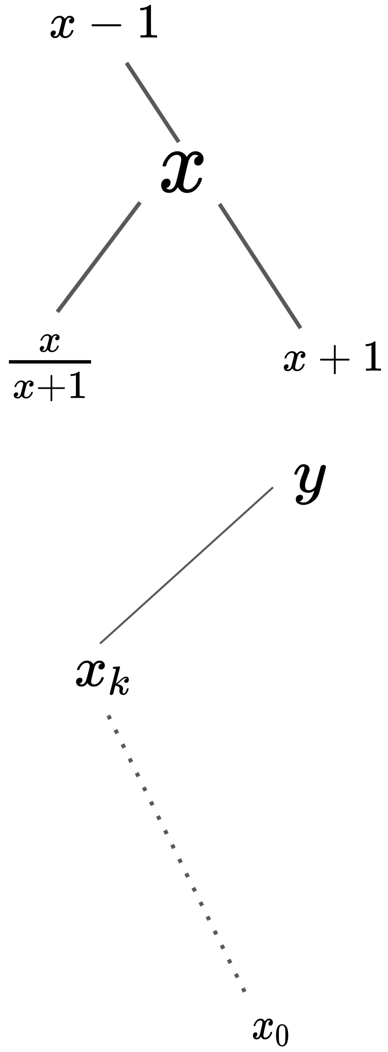
1. Zu zeigen: jedes linke Kind x < 1

   $\frac{x}{x+1}$ <- Bildungsvorschrift für das linke Kind von x

   da $x \geq 0$ und $x < x + 1$ für alle x, folgt direkt

   für jedes linke Kind x: $0 \leq x < 1$

2. k Schritte von $x_0$ zu $x_k$ (linkes Kind von y)



**Was ist k?**

Behauptung: k = $\lfloor x \rfloor$

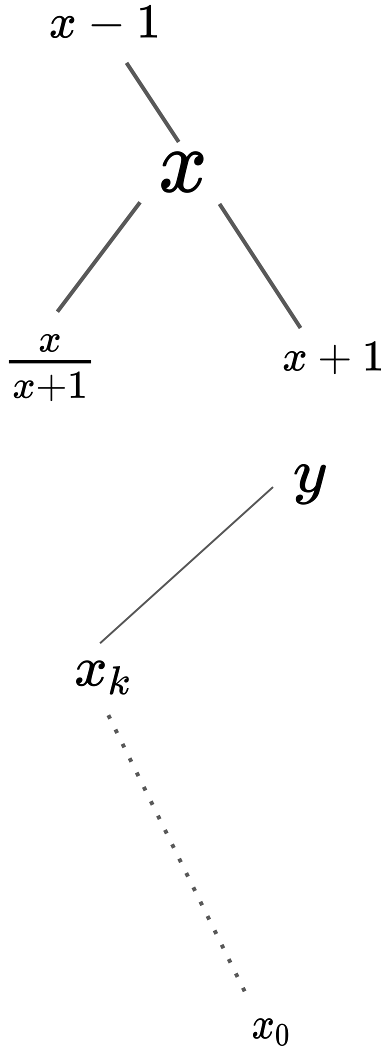
1. Zu zeigen: jedes linke Kind x < 1

   $\frac{x}{x+1}$ <- Bildungsvorschrift für das linke Kind von x

   da $x \geq 0$ und $x < x + 1$ für alle x, folgt direkt

   für jedes linke Kind x: $0 \leq x < 1$

2. k Schritte von $x_0$ zu $x_k$ (linkes Kind von y)
   in jedem Schritt wird 1 subtrahiert



**Was ist k?**

Behauptung: k = $\lfloor x \rfloor$

1. Zu zeigen: jedes linke Kind x < 1

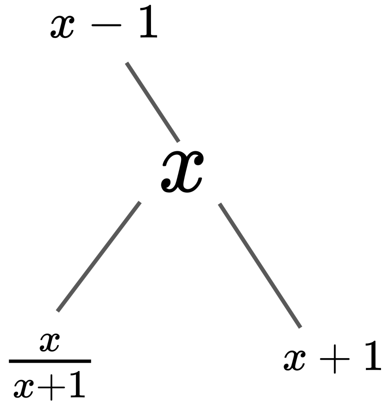
   $\frac{x}{x+1}$ <- Bildungsvorschrift für das linke Kind von x

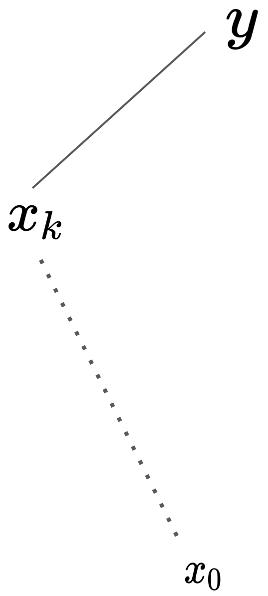
   da $x \geq 0$ und $x < x + 1$ für alle x, folgt direkt

   für jedes linke Kind x: $0 \leq x < 1$

2. k Schritte von $x_0$ zu $x_k$ (linkes Kind von y)
   in jedem Schritt wird 1 subtrahiert

   Nach k Schritten kommen wir zu $0 \leq x_k < 1$



**Was ist k?**

Behauptung: k = $\lfloor x \rfloor$

1. Zu zeigen: jedes linke Kind x < 1

   $\frac{x}{x+1}$ <- Bildungsvorschrift für das linke Kind von x

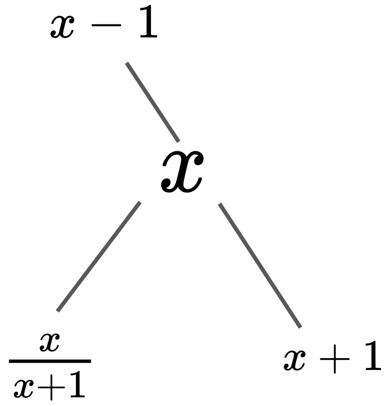
   da $x \geq 0$ und $x < x+1$ für alle x, folgt direkt

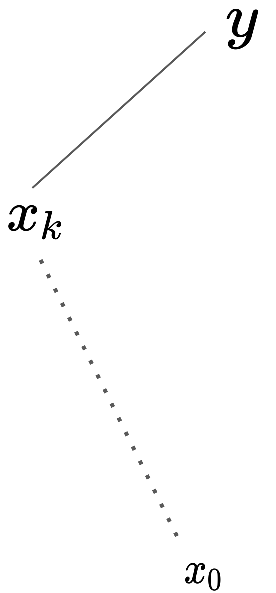
   für jedes linke Kind x: $0 \leq x < 1$

2. k Schritte von $x_0$ zu $x_k$ (linkes Kind von y)
   in jedem Schritt wird 1 subtrahiert

   Nach k Schritten kommen wir zu $0 \leq x_k < 1$

   => $k = \lfloor x_0 \rfloor$



**Aufstellung der Formel:**

$$\frac{y}{y+1} + k = x_0 \quad x_0' = \frac{y+1}{1+k(y+1)}$$

Aus $\frac{y}{y+1} + k = x_0$ mit $k = \lfloor x_0 \rfloor$ folgt:

**Aufstellung der Formel:**

$$\frac{y}{y+1} + k = x_0 \quad x_0' = \frac{y+1}{1+k(y+1)}$$

Aus $\frac{y}{y+1} + k = x_0$ mit $k = \lfloor x_0 \rfloor$ folgt: $\frac{y}{y+1} = \{x_0\}$

**Aufstellung der Formel:**

$$\frac{y}{y+1} + k = x_0 \qquad x_0' = \frac{y+1}{1+k(y+1)}$$

Aus $\frac{y}{y+1} + k = x_0$ mit $k = \lfloor x_0 \rfloor$ folgt: $\frac{y}{y+1} = \{x_0\}$

Also:

$$f(x_0) = \frac{y+1}{1+k(y+1)} = \frac{1}{\lfloor x_0 \rfloor + 1 - \{x_0\}}$$

(Tafel)

**Formel für den Nachfolger von x:**

$$f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor - \{x\} + 1} \; mit \; \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

**Beispiel:** $x = \frac{9}{4}$

$$f(\frac{9}{4}) = \frac{1}{\lfloor \frac{9}{4} \rfloor - \{\frac{9}{4}\} + 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{4} + 1} = \frac{4}{11}$$