$\pi^2/6$ als Summe

Konrad Schön

Institut für Informatik der Humboldt-Universität zu Berlin

23.10.2018

Grundlagen

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert bekannterweise nicht
- Ebenso divergiert $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$
- Leonhard Euler kam jedoch 1734 zu folgender Erkenntnis:

Theorem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

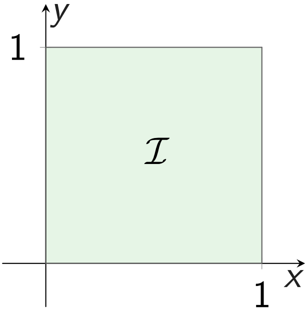
$$
\begin{aligned}
&1 && = 1,000000\\
&1+\frac{1}{4} && = 1,250000\\
&1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9} && = 1,361111\\
&1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16} && = 1,423611\\
&1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25} && = 1,463611\\
&\frac{\pi^2}{6} && = 1,644934
\end{aligned}
$$

Beweis

- In Aigner und Ziegler (2010) [1] werden drei verschiedene Beweise aufgeführt
- Zwei davon beruhen auf der selben Idee
- Die Verwendung des Doppelintegrals

$$\mathcal{I} := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} \, dx \, dy$$

Dieses Integral lässt sich wie folgt verbildlichen



- Der folgende Beweis taucht als Übungsaufgabe bei LeVeque (1956) [2] auf
- LeVeque selbst sagt inzwischen, „er habe keine Ahnung, wo das Problem herkam. Er sei sich nur ziemlich sicher, dass er nicht selbst darauf gekommen sei“(Aigner und Ziegler (2010) [1])
- Der Beweis besteht aus zwei verschiedenen Auswertungen besagten Integrals

Für die erste Auswertung

- entwickelt man $\frac{1}{1-xy}$ in eine geometrische Reihe
- vertauscht man Integration und Summation
- zerlegt man die Summationen in Produkte
- integriert man

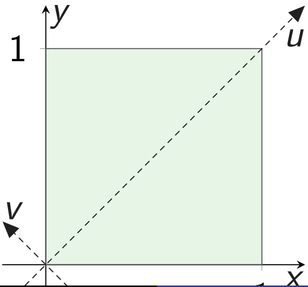
Dies führt zu:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \, dx \, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n \, dx \, dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^n \, dx \right) \left(\int_0^1 y^n \, dy \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

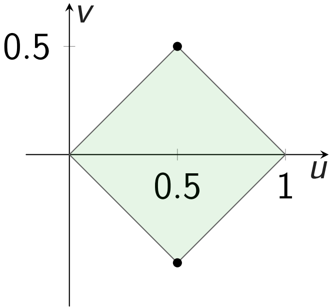
Die zweite Auswertung basiert auf einem Koordinatenwechsel. Die neuen Koordinaten sind gegeben durch

$$u := \frac{y+x}{2} \qquad \text{und} \qquad v := \frac{y-x}{2}$$

Damit ergibt sich



Damit ist der Integrationsbereich ein Quadrat der Seitenlänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ welches aus dem alten Integrationsbereich entsteht, indem dieser um 45 rotiert und um den Faktor $\sqrt{2}$ verkleinert wird.



Zum Integrieren wird die Substitution

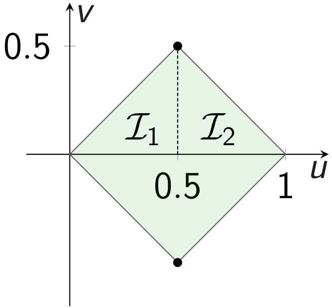
$$x = u - v \qquad \text{und} \qquad y = u + v$$

verwendet, womit

$$\frac{1}{1 - xy} = \frac{1}{1 - (u - v)(u + v)} = \frac{1}{1 - u^2 + v^2}$$

folgt.
Hierbei muss $dx\,dy$ durch $2\,du\,dv$ ersetzt werden.

Der neue Integrationsbereich ist symmetrisch wodurch es genügt den oben Bereich zu integrieren und mit 2 zu multiplizieren.
Dazu bietet es sich an, den Integrationsbereich in die Bereiche $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ aufzuteilen.



Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = &\; 2\mathcal{I}_1 + 2\mathcal{I}_2 \\ = &\; 4\int_0^{1/2}\left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du \\ &+ 4\int_{1/2}^{1}\left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du\end{aligned}$$

Man kann sich überlegen:

$$\mathcal{I} = 4\int_0^{1/2}\left(\int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1-u^2}^2+v^2}\right)du + 4\int_{1/2}^{1}\left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{\sqrt{1-u^2}^2+v^2}\right)du$$

Mit $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ folgt daraus:

$$\mathcal{I} = 4\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right]_0^u du + 4\int_{1/2}^{1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right]_0^{1-u} du$$

Mit $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ folgt daraus:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \ & 4\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\,du \\ & + 4\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\,du\end{aligned}$$

An dieser Stelle könnte man die Integrale durch erneutes Substituieren von

$$u = sin\theta, v = cos\theta$$

lösen.

Es fällt jedoch auf:
Für

$$g(u) := \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

ist die Ableitung gegeben durch

$$g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Sowie für

$$h(u) := \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right)$$

ist die Ableitung gegeben durch

$$h'(u) = -\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} = \; & 4 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \, du \\
& + 4 \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \, du \\
= \; & 4 \int_0^{1/2} g'(u) g(u) \, du + 4 \int_{1/2}^{1} -2h'(u) h(u) \, du
\end{aligned}$$

Nun lässt sich die Integrationsregel

$$\int_a^b f'(x)f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}f(b)^2 - \frac{1}{2}f(a)^2$$

anwenden.

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= 4\int_0^{1/2} g'(u)g(u)\,du + 4\int_{1/2}^{1} -2h'(u)h(u)\,du \\
&= 2\left[g(u)^2\right]_0^{1/2} - 4\left[h(u)^2\right]_{1/2}^{1} \\
&= 2g\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2g(0)^2 - 4h(1)^2 + 4h\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

Somit folgt insgesamt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \mathcal{I} = \frac{\pi^2}{6}$$

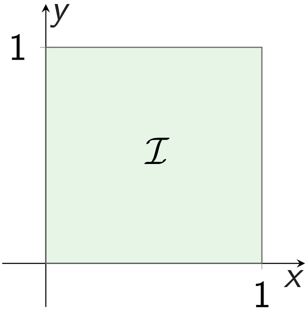
Womit die Aussage bewiesen ist. $\square$

Der zweite Beweis beweist die zu Eulers Theorem äquivalente Aussage

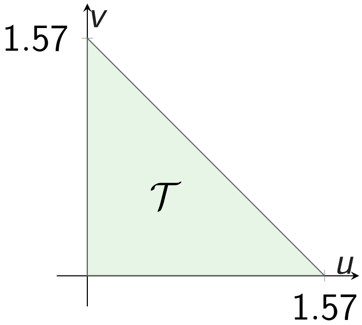
Theorem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Dabei wird aus dem bekannten Doppelintegral



per Koordinatentransformation das folgende Integral.



Der letzte Beweis ist ein Beweis auf elementarer Ebene, welcher ganz intensiv die Trigonometrischen Funktionen verwendet.

Wie schnell konvergiert die Summe?

Dafür muss die Differenz

$$\frac{\pi}{6} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

abgeschätzt werden.

Wie schnell konvergiert die Summe?

Dies geschieht mittels zweier Integrale.

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_m^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{m}$$

als obere Schranke und

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \int_{m+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{m+\frac{1}{2}}$$

als untere Schranke.

Wie schnell konvergiert die Summe?

Das bedeutet, die Summe konvergiert überhaupt nicht gut.
Für $m = 1000$ ist ein Fehler in der dritten Nachkommastelle zu erwarten.
Für $m = 1000000$ ist ein Fehler in der sechsten Nachkommastelle zu erwarten.

Wie schnell konvergiert die Summe?

Wenn man sich dies für $m = 1000000$ einmal anguckt, kommt folgendes dabei raus:

$$\pi^2/6 = 1.6449340668482264364724151666460251\,89$$

$$\sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{n^2} = 1.6449330668487264363057489999793918558$$

Wie schnell konvergiert die Summe?

Wenn man sich dies für $m = 1000000$ einmal anguckt, kommt folgendes dabei raus:

$$\pi^2/6 = 1.64493406684822643647241516664602518 9$$

$$\sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{n^2} = 1.64493306684872643630574899979391855 8$$

Wie schnell konvergiert die Summe?

Es gibt also ein Muster. Auf dieses wird an dieser Stelle aber nicht genauer eingegangen.

[1] Aigner, Martin ; Ziegler, Günter M.: *Das BUCH der Beweise*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. – ISBN 978–3–642–02258–6

[2] LeVeque, W. J.: *Topics in Number Theory*. Addison-Wesley Pub. Co, 1956 (Addison-Wesley mathematics series). https://books.google.de/books?id=x9ZQAAAAMAAJ