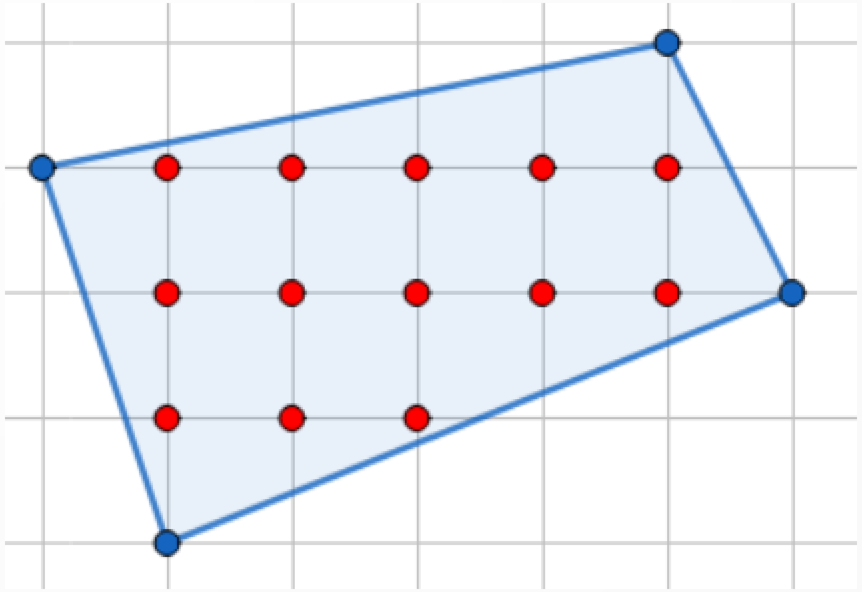
Satz von Pick

Florian Albrecht

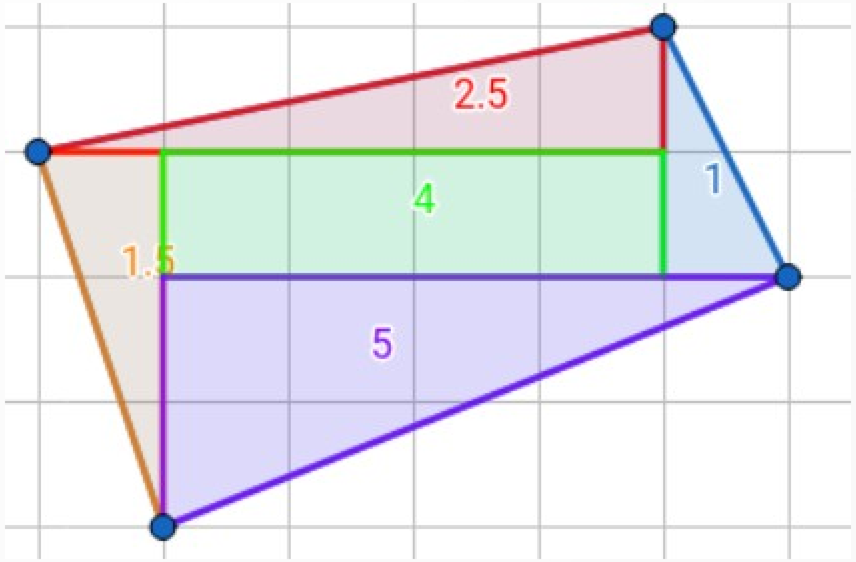
Beispiel

- ***A = I + (B / 2) – 1***
- I : Anzahl innerer Gitterpunkte
- *B = Anzahl äußerer Gitterpunkte*
- I = 13
- B = 4
- A = 13 + (4 / 2) – 1 = 14



Beispiel

- ***A = I + (B / 2) – 1***
- I : Anzahl innerer Gitterpunkte
- *B = Anzahl äußerer Gitterpunkte*
- I = 13
- B = 4
- A = 13 + (4 / 2) – 1 = 14



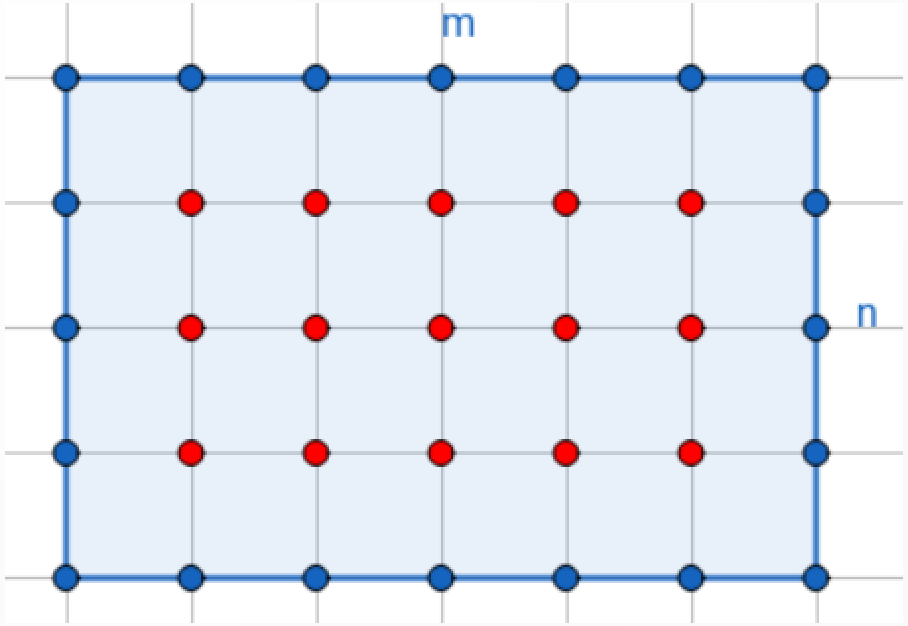
Beweisidee

- Beweis des Theorems für Rechtecke
- => Gitterparallele Dreiecke
- => allg. Dreiecke
- Beweis für Polygone per Induktion

Rechtecke

- *m Kästchen : m+1 Gitterpunkte*
- $I = (m - 1)\,(n - 1)$
- $B = 2(m+1) + 2(n+1) - 4$

  $= (2m + 2n)$
- $A = mn$



Beweis für Rechtecke

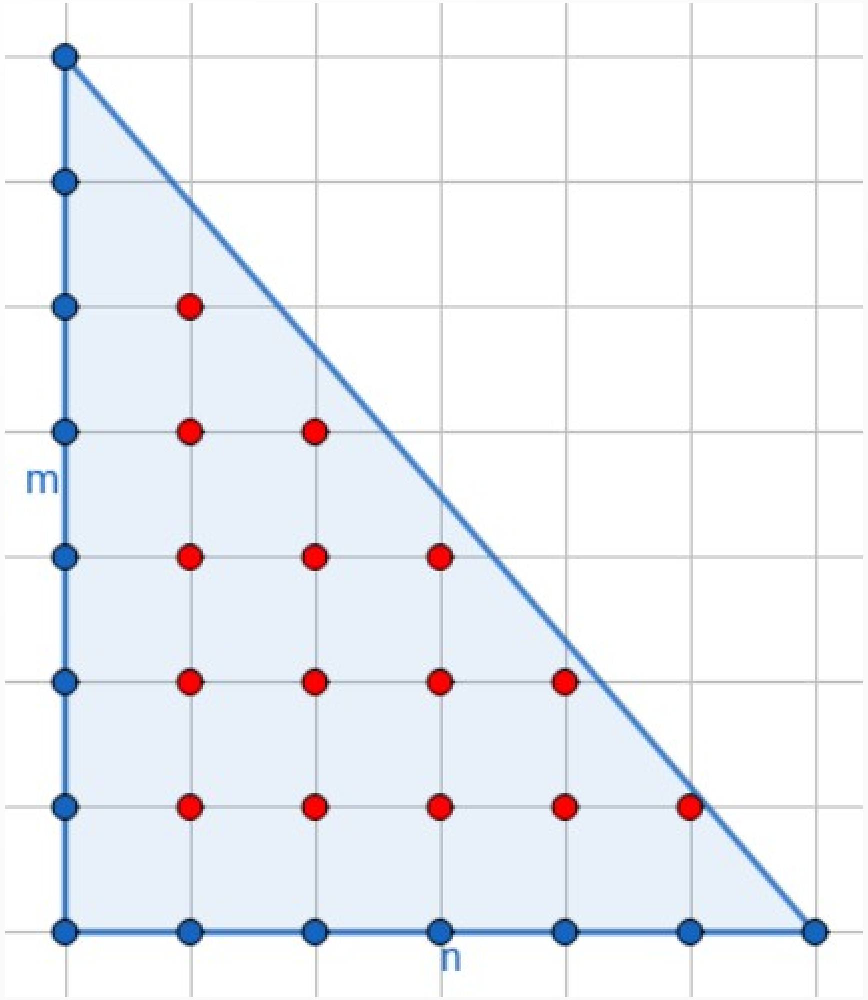
- $I + B/2 - 1 = (m - 1)(n - 1) + 2(m + n) / 2 - 1$

  $= (mn - m - n + 1) + (m + n) - 1$

  $= mn$

Gitterparallele Dreiecke

- rechtwinkling
- $I = ((m - 1)\ (n - 1) - k) / 2$
- $B = m + n + 1 + k$
- $A = mn / 2$



Beweis für Gitterparallele Dreiecke

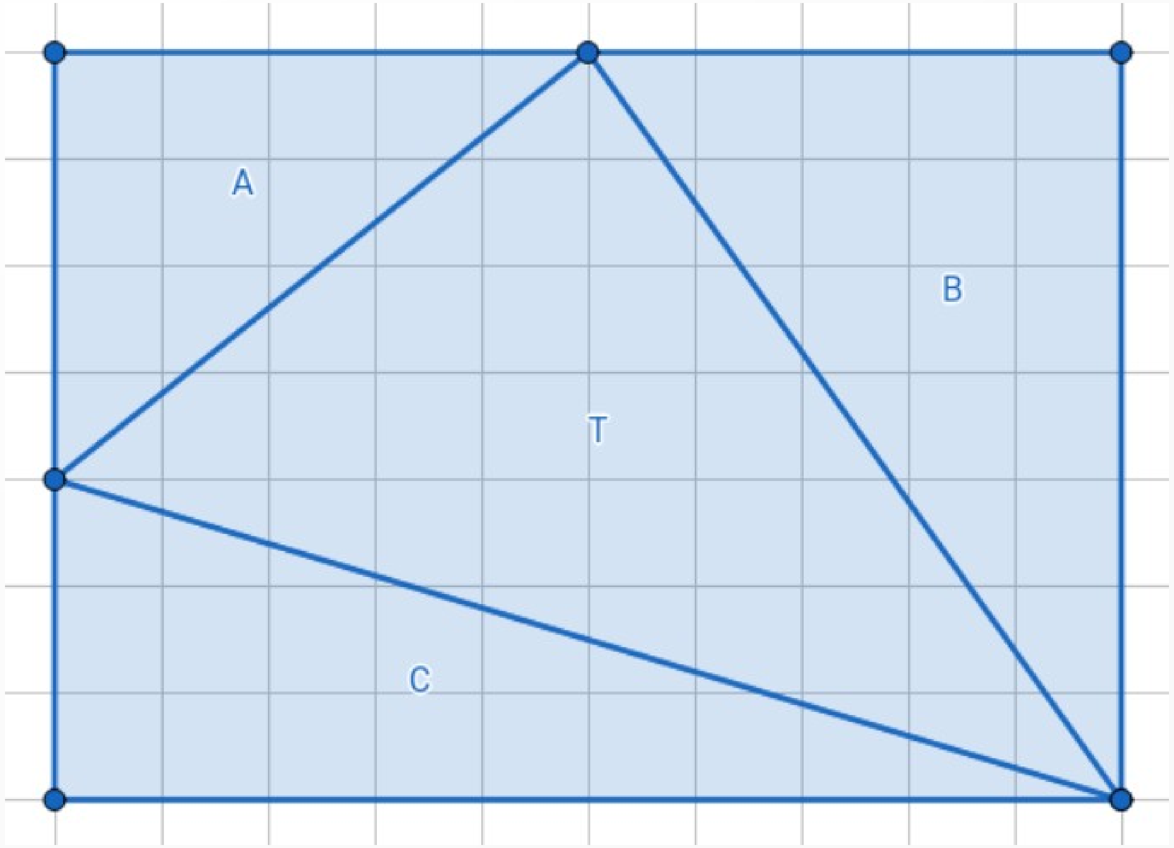
- $I + B/2 - 1 = [(m-1)(n-1) - k] / 2 + [m + n + 1 + k] / 2$

  $= mn/2 - m/2 - n/2 + ½ + k/2 + m/2 + n/2 + ½ + k/2 - 1$

  $= mn/2$

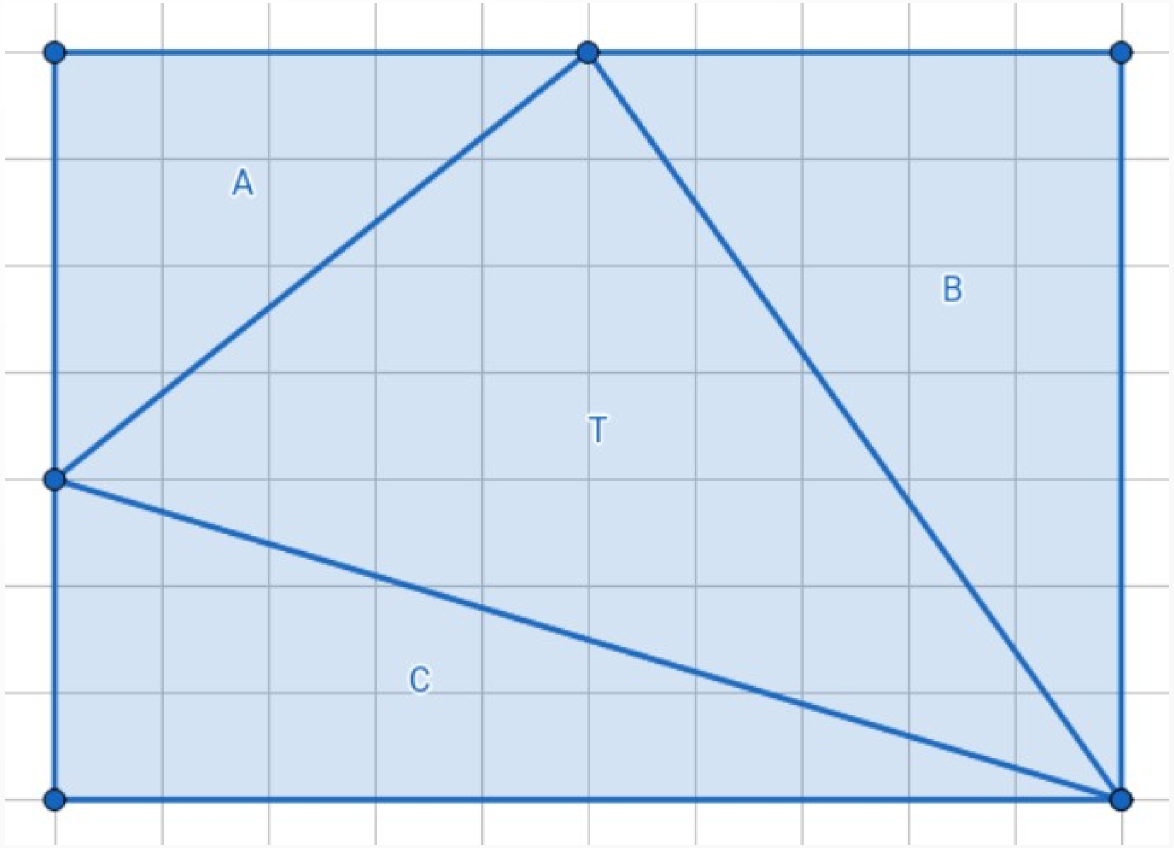
beliebige Dreiecke

- A,B,C : Gitterparallele Dreiecke
- T : bel. Dreieck
- R : Rechteck aus A,B,C,T



Beweis für bel. Dreiecke

- geg.:
  - $A(A) = I_a + B_a/2 - 1$
  - $A(B) = I_b + B_b/2 - 1$
  - $A(C) = I_c + B_c/2 - 1$
  - $A(R) = I_r + B_r/2 - 1$
- z.Z.:
  - $A(T) = I_t + B_t/2 - 1$

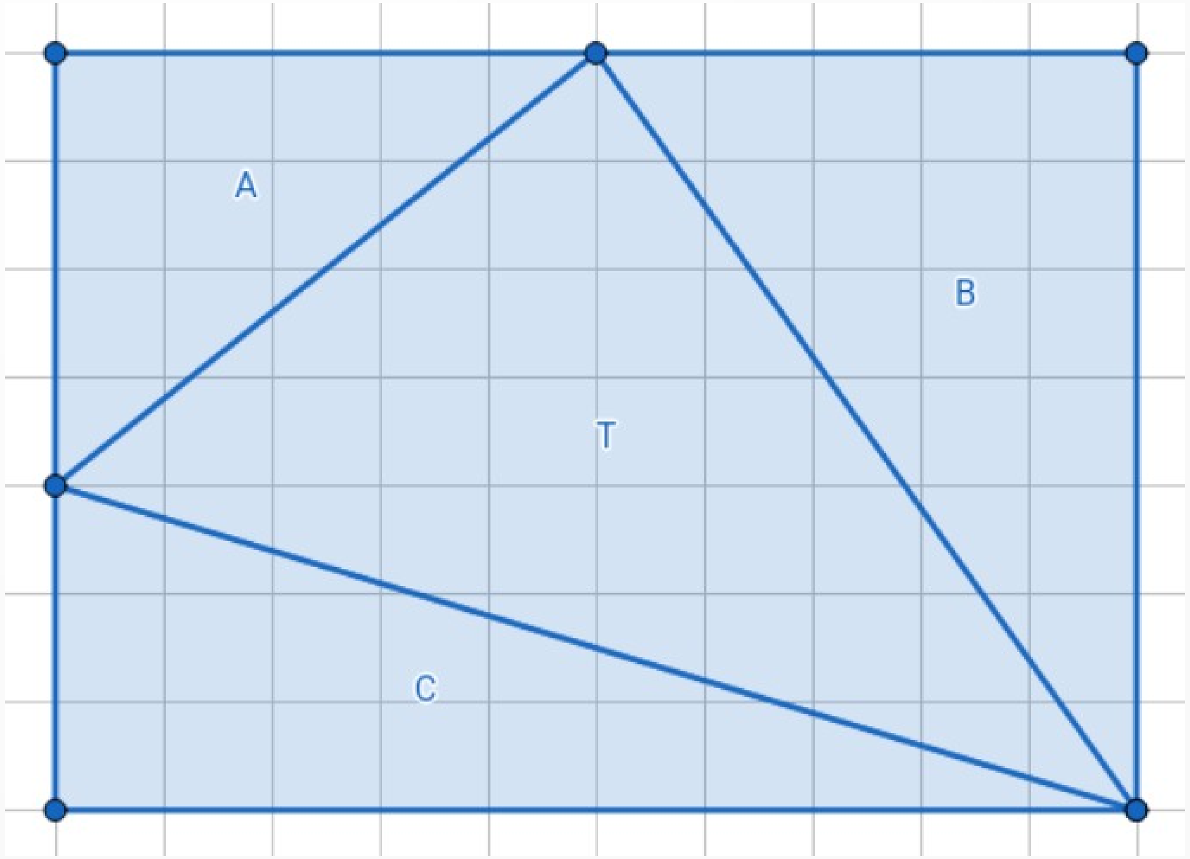


Flächeninhalt

- $$A(T) = A(R) - A(A) - A(B) - A(C) \qquad (1)$$
  $$= I_r - I_a - I_b - I_c + (B_r - B_a - B_b - B_c) / 2 + 2 \qquad (2)$$

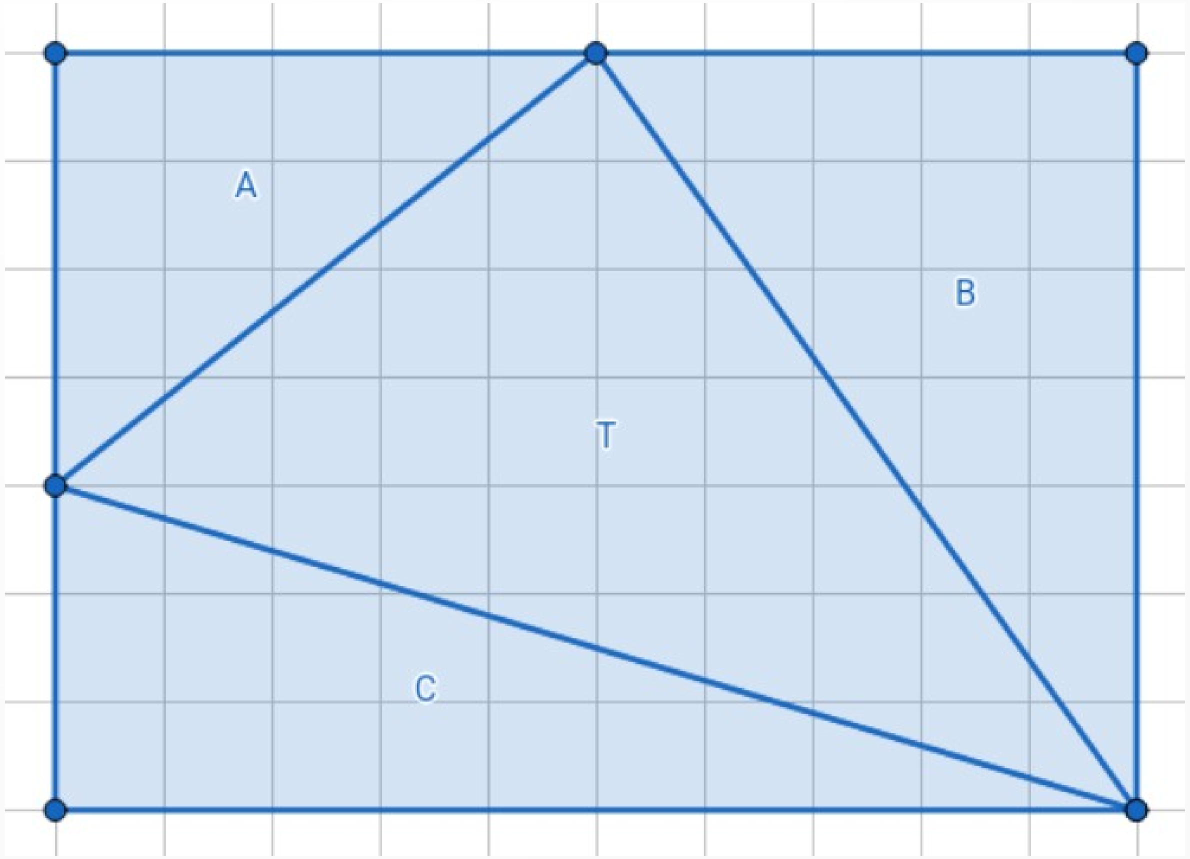
Anzahl Gitterpunkte am Rand

- $B_a + B_b + B_c = B_r + B_t$
- $B_r = B_a + B_b + B_c - B_t$ *(3)*



Anzahl innerer Gitterpunkte

- $I_r = I_a + I_b + I_c + I_t + (B_a + B_b + B_c - B_r) - 3 \qquad (4)$



Anzahl innerer Gitterpunkte

- $B_r = B_a + B_b + B_c - B_t$ (3)
- $I_r = I_a + I_b + I_c + I_t + (B_a + B_b + B_c - B_r) - 3$ (4)
- B_r aus (3) in (4) einsetzen
- $I_r = I_a + I_b + I_c + I_t + (B_a + B_b + B_c - B_a + B_b + B_c - B_t) - 3$

  $= I_a + I_b + I_c + I_t + B_t - 3$ (5)

Flächeninhalt

- $A(T) = A(R) - A(A) - A(B) - A(C)$

$$= I_r - I_a - I_b - I_c + (B_r - B_a - B_b - B_c) / 2 + 2$$

$$= (I_a + I_b + I_c + I_t + B_t - 3) - I_a - I_b - I_c \qquad I_r \text{ aus } (5)$$

$$+ ((B_a + B_b + B_c - B_t) - B_a - B_b - B_c) / 2 + 2 \qquad B_r \text{ aus } (3)$$

$$= I_t + B_t - 3 - B_t / 2 + 2$$

$$= I_t + B_t / 2 - 1$$

Polygone

- Was wissen wir bereits:
  - Theorem gilt für
    - Rechtecke
    - allg. Dreiecke
- Was wollen wir beweisen:
  - Theorem gilt für Polygone

Beweisidee

- Beweis für jedes n-seitige Polygone
  - 3-seitiges Polygon => bel. Dreieck
  - 4-setitiges Polygon => Rechteck => bel. Viereck
  - …
- Induktionsbeweis

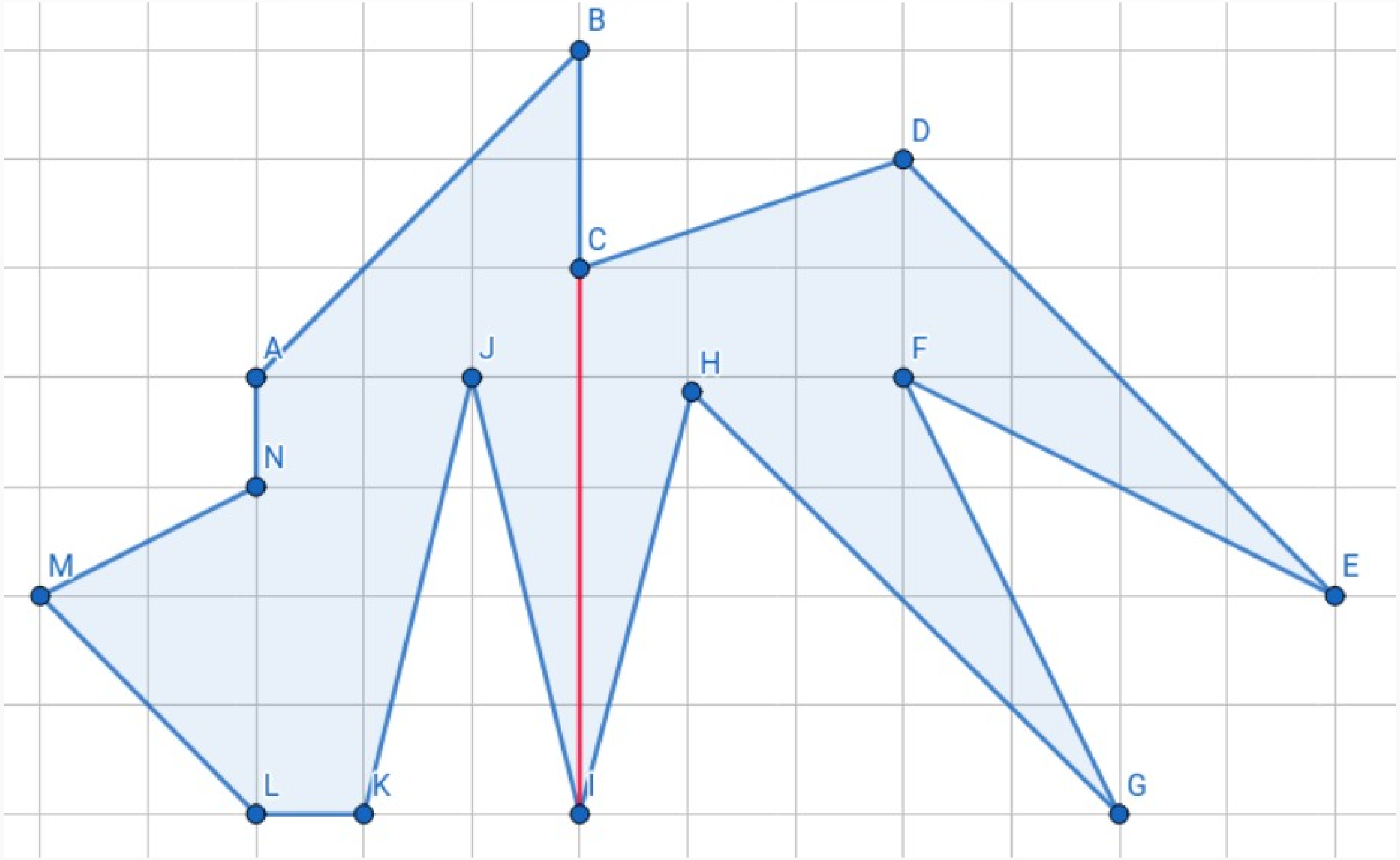
Induktionsbeweis

- Induktionsanfang
  - $A(3) = I_3 + B_3 / 2 - 1$ => Dreieck
- Induktionsvoraussetzung
  - $A(n) = I_n + B_n / 2 - 1$ => *n-seitiges Polygon*
- *Induktionsschritt*
  - $A(n+1) = I_{n+1} + B_{n+1} / 2 - 1$ => *(n+1)-seitiges Polygon*

Induktionsschritt

- Zerlegung des n-seitigen Polygons in zwei Polygone mit weniger als n Seiten (P_a und P_b)
- Für diese gilt unter der Induktionsvoraussetzung:
  - $A(P_a) = I_a + B_a / 2 - 1$ und $A(P_b) = I_b + B_b / 2 - 1$
- Der Flächeninhalt von P ist dann
  - $A(P) = (I_a + B_a / 2 - 1) + (I_b + B_b / 2 - 1)$

Induktionsschritt



Induktionsschritt

- m : Gitterpunkte auf der Diagonale
- $I = I_A + I_B + m - 2$
- $B = B_A + B_B - 2m + 2$
- $I + B/2 - 1 = I_A + I_B + m - 2 + [B_A + B_B - 2m + 2] / 2 - 1$

$$= I_A + I_B + m - 2 + B_A/2 + B_B/2 - m + 1 - 1$$

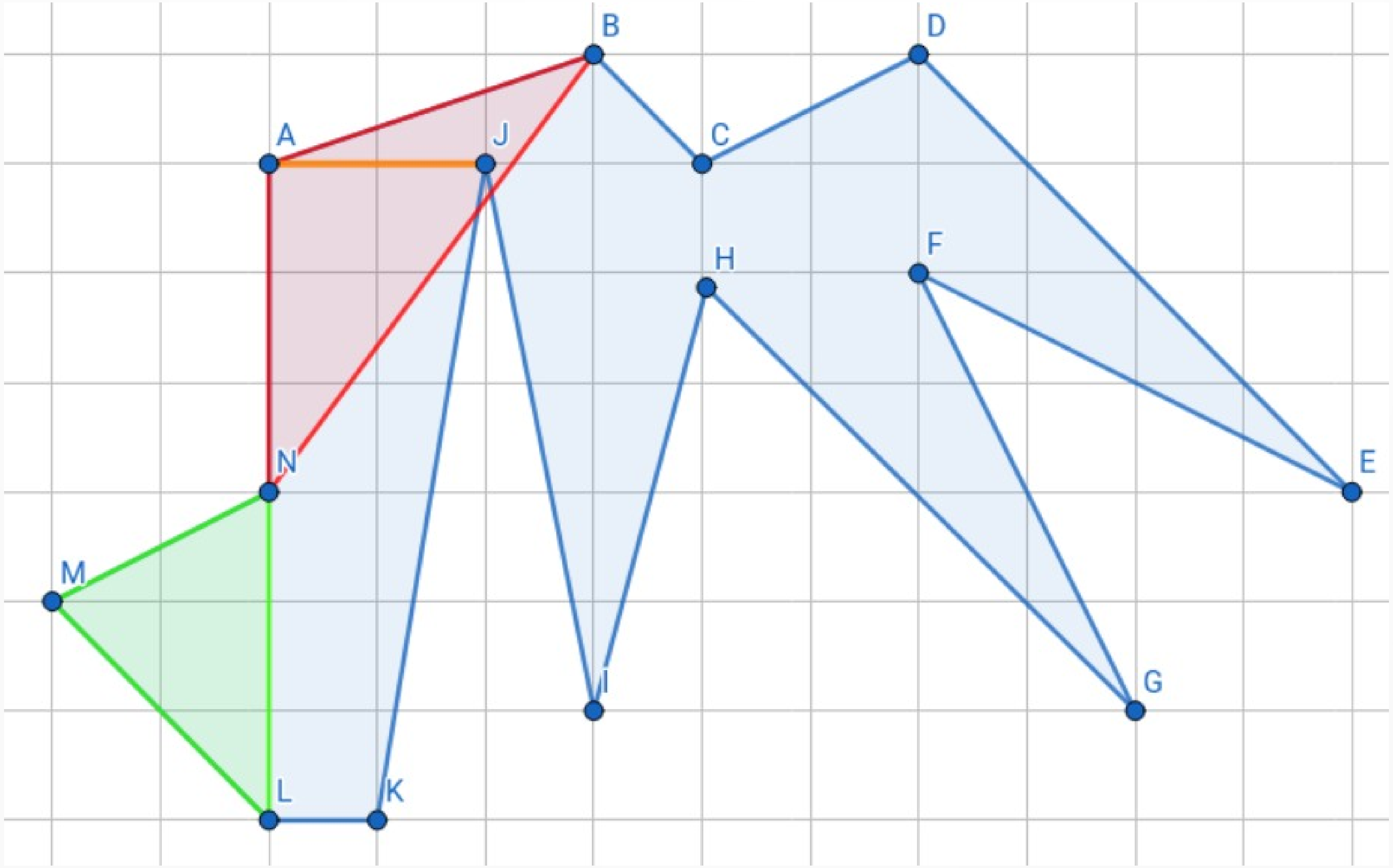
$$= I_A + I_B + B_A/2 + B_B/2 - 2$$

$$= \mathbf{(I_A + B_A/2 - 1) + (I_B + B_B/2 - 1)} \quad = \quad A(P)$$

Fertig . . . ?

- Lässt sich jedes Polygon zerlegen (in Dreiecke) ?
  - existiert immer solch eine teilende Diagonale?
- => JA

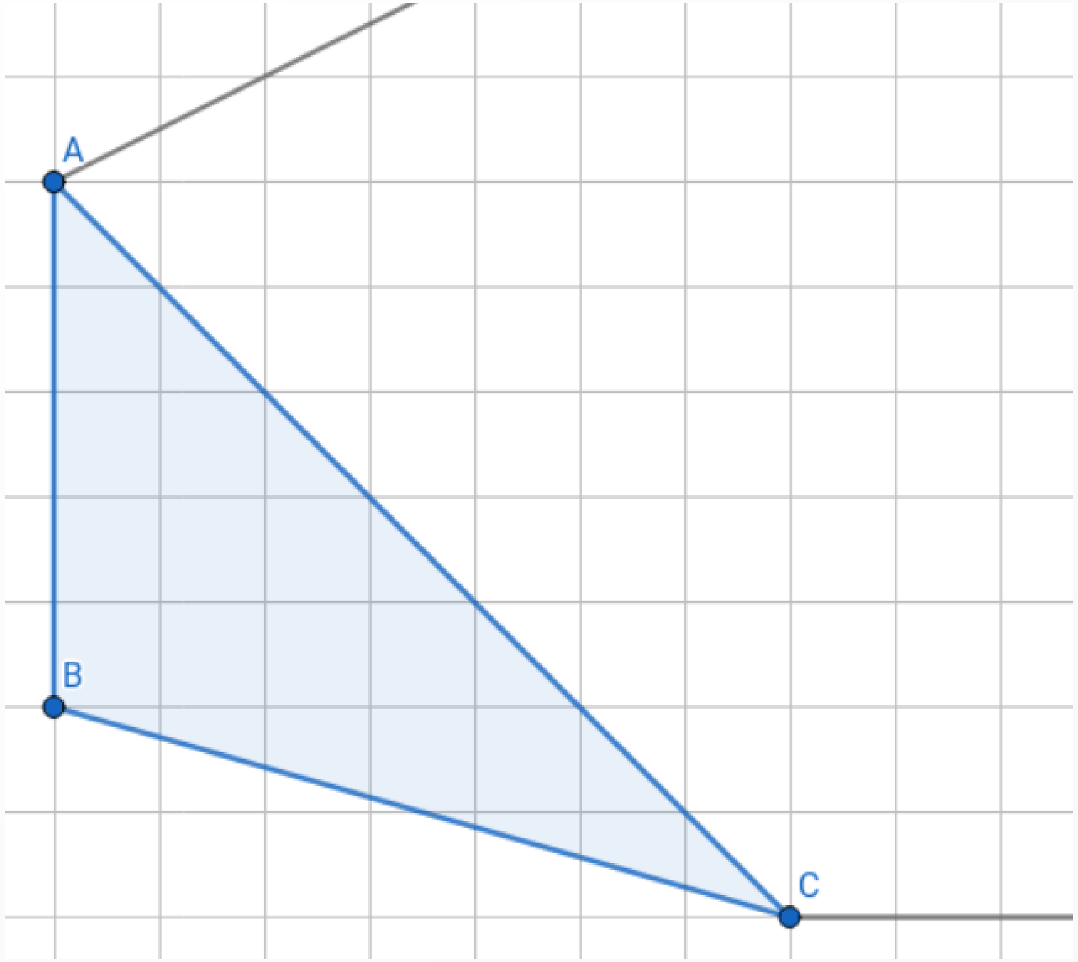
Zerlegung von Polygonen



Zerlegung von Polygonen

- Winkel ABC < 180°
- Fallunterscheidung
  - AC schneidet nichts

    => AC ist gesuchte Diagonale



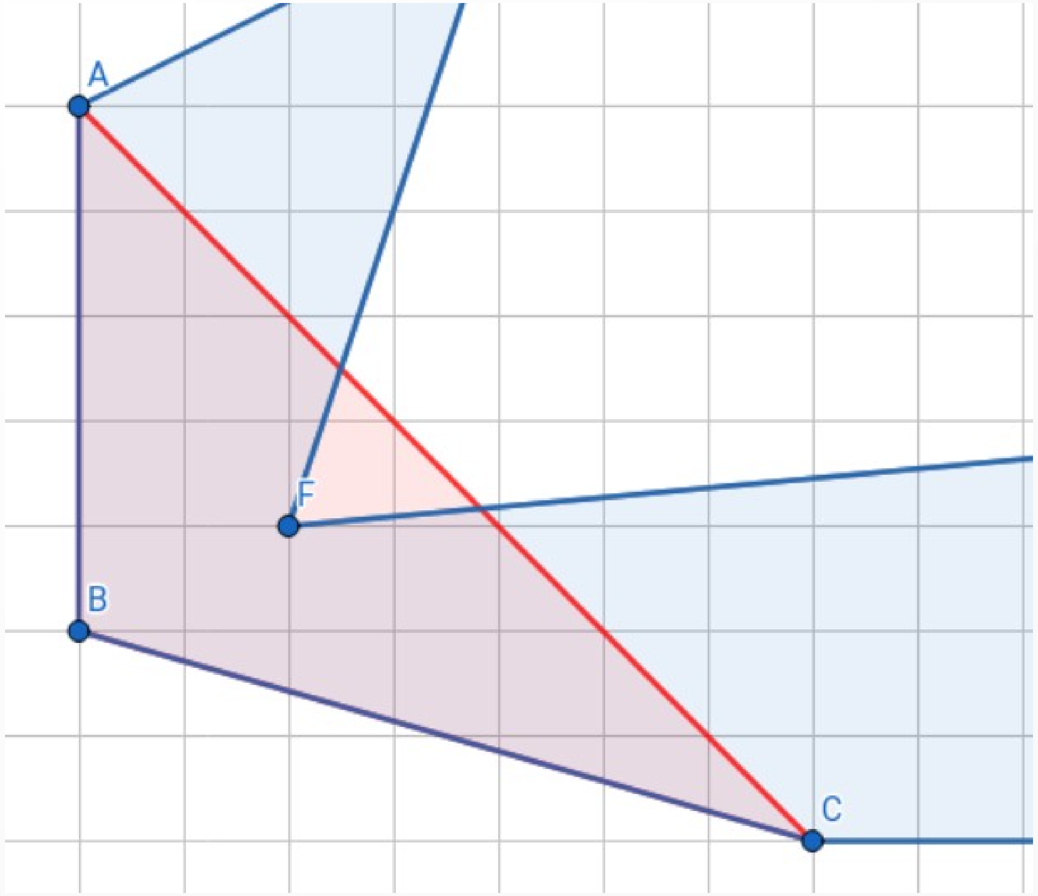
Zerlegung von Polygonen

- Winkel ABC < 180°
- Fallunterscheidung
  - AC schneidet nichts

    => AC ist gesuchte Diagonale
  - AC schneidet das Polygon

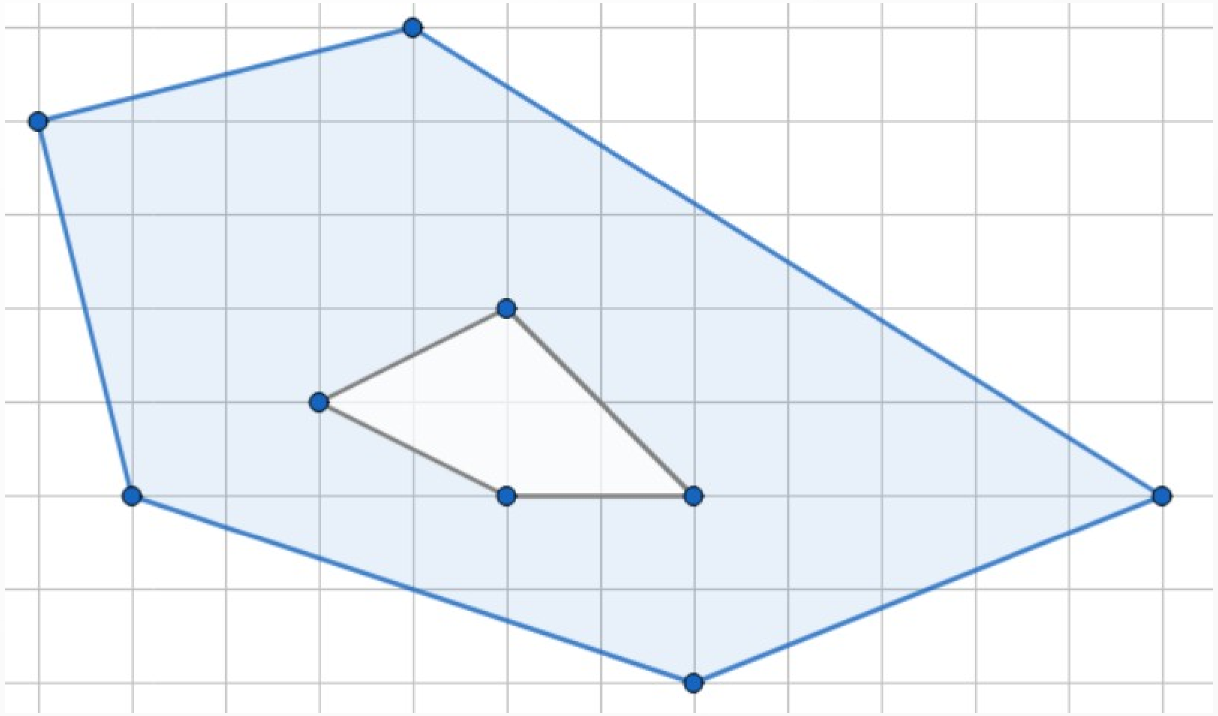
    => im Dreieck ABC muss sich ein weiterer Eckpunkt befinden

    => BF muss damit Diagonale sein



Zusatz: Polygone mit Löchern

- n : Anzahl der Löcher
- $\boldsymbol{A = I + B/2 - 1 + n}$

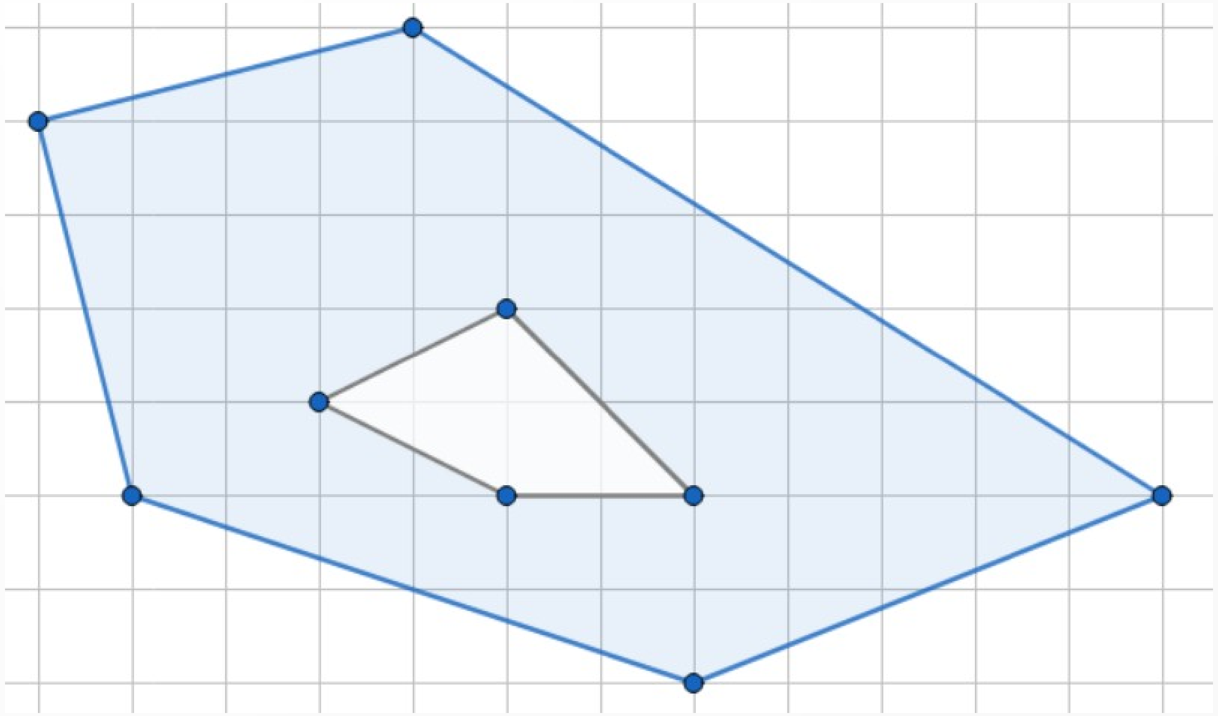


Polygon mit einem Loch

- z.Z.: A$(P) = I + B/2 - 1 + 1 = I + B/2$
- Wir betrachten das Polygon inklusive des Lochs mit:
  - $A_o = I_o + B_o/2 - 1$
- und das Polygon, welches das Loch ergibt mit:
  - $A_h = I_h + B_h/2 - 1$
- Für die Fläche des umgebenden Polygons ergibt sich dann:
  - $\boldsymbol{A} = A_o - A_h = I_o + B_o/2 - 1 - (I_h + B_h/2 - 1) = \boldsymbol{I_o - I_h + (B_o - B_h)/2}$

Polygon mit einem Loch

- $I = I_o - I_h - B_h$
- $B = B_o + B_h$
- $A = I + B/2$
- $A = I_o - I_h - B_h + (B_o + B_h) / 2$
- $A = I_o - I_h + (B_o + B_h - 2B_h) / 2$
- $A = \mathbf{I_o - I_h + (B_o - B_h)/2}$



Polygon mit n-Löchern

- Flächeninhalt des Polygons

$$A = A_o - \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$mit\ \ A_o = I_o + \frac{B_o}{2} - 1\ und\ \ A_i = I_i + \frac{B_i}{2} - 1$$

$$A = I_o + \frac{B_o}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(I_i + \frac{B_i}{2} - 1\right)$$

$$= I_o + \frac{B_o}{2} - 1 + n - \sum_{i=1}^{n} \left(I_i + \frac{B_i}{2}\right)$$

Polygon mit n-Löchern

- Satz von Pick

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 + n$$

$$mit\ \ I = I_o - \sum\nolimits_{i=1}^{n} (I_i + B_i)\ und\ \ B = B_o - \sum\nolimits_{i=1}^{n} (B_i)$$

$$A = I_o - \sum\nolimits_{i=1}^{n} (I_i + B_i) + \frac{B_o - \sum\nolimits_{i=1}^{n} (B_i)}{2} - 1 + n$$

$$= I_o + \frac{B_o}{2} - \sum\nolimits_{i=1}^{n} (I_i + \frac{B_i}{2}) - 1 + n$$

Quellen

- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f1/Pick-theorem.png
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/09/GeorgPick.png
- https://www.geogebra.org/geometry
- http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf
- http://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/algorithms/2009/notes/xp-polytri.pdf