Zufälliges Mischen

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon
2. Der Bildchensammler

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon
2. Der Bildchensammler
3. Einmischen der obersten Karte

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon
2. Der Bildchensammler
3. Einmischen der obersten Karte
4. Stark gleichverteilte Halteregel

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon
2. Der Bildchensammler
3. Einmischen der obersten Karte
4. Stark gleichverteilte Halteregel
5. Vom Sammeln zum Spielen

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon
2. Der Bildchensammler
3. Einmischen der obersten Karte
4. Stark gleichverteilte Halteregel
5. Vom Sammeln zum Spielen
6. Riffle Shuffle (Bogenmischen)

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon
2. Der Bildchensammler
3. Einmischen der obersten Karte
4. Stark gleichverteilte Halteregel
5. Vom Sammeln zum Spielen
6. Riffle Shuffle (Bogenmischen)

   6.1 Einführende Überlegungen

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon
2. Der Bildchensammler
3. Einmischen der obersten Karte
4. Stark gleichverteilte Halteregel
5. Vom Sammeln zum Spielen
6. Riffle Shuffle (Bogenmischen)

   6.1 Einführende Überlegungen

   6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Inhalt

1. Das Geburtstagsparadoxon
2. Der Bildchensammler
3. Einmischen der obersten Karte
4. Stark gleichverteilte Halteregel
5. Vom Sammeln zum Spielen
6. Riffle Shuffle (Bogenmischen)

   6.1 Einführende Überlegungen

   6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

   6.3 Schlussfolgerung

1. Das Geburtstagsparadoxon

- Die Wahrscheinlichkeit, dass n Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben:

$$p(n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right)$$

1. Das Geburtstagsparadoxon

- Die Wahrscheinlichkeit, dass n Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben:

$$p(n) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i}{365})$$

- Allgemein:

$$p(n, K) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i}{K})$$

2. Der Bildchensammler

- Kinder kaufen Fotos von Fussballern in undurchsichtigen Umschlägen. Wie lange müssen sie kaufen, bis sie bei n verschiedenen Bildern jedes Motiv mindestens einmal bekommen?

2. Der Bildchensammler

- Kinder kaufen Fotos von Fussballern in undurchsichtigen Umschlägen. Wie lange müssen sie kaufen, bis sie bei n verschiedenen Bildern jedes Motiv mindestens einmal bekommen?

- Allgemein: Bei n unterscheidbaren Kugeln in einer Urne: Wie oft muss man ziehen (mit Zurücklegen), bis jede Kugel einmal gezogen wurde?

2. Der Bildchensammler

- Falls man schon k unterschiedliche Kugeln gezogen hat, ist die Wahrscheinlichkeit keine neue Kugel zu ziehen:

$$\frac{k}{n}$$

2. Der Bildchensammler

- Falls man schon k unterschiedliche Kugeln gezogen hat, ist die Wahrscheinlichkeit keine neue Kugel zu ziehen:

$$\frac{k}{n}$$

- Wahrscheinlichkeit genau s Ziehungen bis zur neuen Kugel zu benötigen:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

2. Der Bildchensammler

- Erwartungswert für die Anzahl der Ziehungen bis zur nächsten neuen Kugel:

$$\sum_{s\geq 1} \left(\frac{k}{n}\right)^{s-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) s$$

2. Der Bildchensammler

- Erwartungswert für die Anzahl der Ziehungen bis zur nächsten neuen Kugel:

$$\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)s$$

$$=\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}s-\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s}s$$

2. Der Bildchensammler

- Erwartungswert für die Anzahl der Ziehungen bis zur nächsten neuen Kugel:

$$\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)s$$

$$=\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}s-\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s}s$$

$$=\sum_{s\geq 0}\left(\frac{k}{n}\right)^{s}(s+1)-\sum_{s\geq 0}\left(\frac{k}{n}\right)^{s}s$$

2. Der Bildchensammler

- Erwartungswert für die Anzahl der Ziehungen bis zur nächsten neuen Kugel:

$$\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)s$$

$$=\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}s-\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s}s$$

$$=\sum_{s\geq 0}\left(\frac{k}{n}\right)^{s}(s+1)-\sum_{s\geq 0}\left(\frac{k}{n}\right)^{s}s$$

$$=\sum_{s\geq 0}\left(\frac{k}{n}\right)^{s} = \frac{1}{1-\frac{k}{n}}$$

2. Der Bildchensammler

- Erwartungswert für die Anzahl von Ziehungen, bis jede der n Kugeln einmal gezogen wurde:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-\frac{k}{n}}$$

2. Der Bildchensammler

- Erwartungswert für die Anzahl von Ziehungen, bis jede der n Kugeln einmal gezogen wurde:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \ldots + \frac{n}{2} + \frac{n}{1}$$

2. Der Bildchensammler

- Erwartungswert für die Anzahl von Ziehungen, bis jede der n Kugeln einmal gezogen wurde:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \ldots + \frac{n}{2} + \frac{n}{1}$$

$$= nH_n$$

2. Der Bildchensammler

- Erwartungswert für die Anzahl von Ziehungen, bis jede der n Kugeln einmal gezogen wurde:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \ldots + \frac{n}{2} + \frac{n}{1}$$

$$= nH_n$$

$$\approx n \log n$$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:
    - V_n : Anzahl der Ziehungen

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:
    - V_n : Anzahl der Ziehungen
    - $E(V_n) \approx n \log n$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:
    - V_n : Anzahl der Ziehungen
    - $E(V_n) \approx n \log n$
    - mehr als $m := \lceil n \log n + cn \rceil$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:
  - V_n : Anzahl der Ziehungen
  - $E(V_n) \approx n \log n$
  - mehr als $m := \lceil n \log n + cn \rceil$
  - A_i : Ereignis, dass Kugel i in den ersten m Ziehungen nicht erwischt wird

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:

$$Prob[V_n > m]$$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:

$$Prob[V_n > m] = Prob[\bigcup_i A_i]$$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:

$$Prob[V_n > m] \;=Prob[\bigcup_i A_i]$$

$$\leq \sum_i Prob[A_i]$$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:

$$Prob[V_n > m] \;=\; Prob[\bigcup_i A_i]$$

$$\leq \sum_i Prob[A_i] \qquad = n(1 - \frac{1}{n})^m$$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:

$$Prob[V_n > m] = Prob[\bigcup_i A_i]$$

$$\leq \sum_i Prob[A_i] = n(1 - \frac{1}{n})^m$$

$$= n(1 - \frac{1}{n})^{\frac{mn}{n}}$$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:

$$
\begin{aligned}
Prob[V_n > m] &= Prob[\bigcup_i A_i] \\
\leq \textstyle\sum_i Prob[A_i] &= n(1 - \frac{1}{n})^m \\
= n(1 - \frac{1}{n})^{\frac{mn}{n}} &< ne^{\frac{-m}{n}}
\end{aligned}
$$

2. Der Bildchensammler

- Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass deutlich mehr als n log n Ziehungen benötigt werden:

$$Prob[V_n > m] = Prob[\bigcup_i A_i]$$

$$\leq \sum_i Prob[A_i] = n(1 - \frac{1}{n})^m$$

$$= n(1 - \frac{1}{n})^{\frac{mn}{n}} < ne^{\frac{-m}{n}} \leq e^{-c}$$

3. Einmischen der obersten Karte

Frage: Wann ist der Stapel gut genug gemischt?

3. Einmischen der obersten Karte

Frage: Wann ist der Stapel gut genug gemischt?

- Betrachte die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den $n!$ vielen Permutationen des Stapel

3. Einmischen der obersten Karte

Frage: Wann ist der Stapel gut genug gemischt?

- Betrachte die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den n! vielen Permutationen des Stapel
- Beispiel:

  Anfangsverteilung E: $E(id) = 1$,

3. Einmischen der obersten Karte

Frage: Wann ist der Stapel gut genug gemischt?

- Betrachte die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den n! vielen Permutationen des Stapel
- Beispiel:

Anfangsverteilung E: $E(id) = 1$,

$E(\pi) = 0$ sonst

3. Einmischen der obersten Karte

Frage: Wann ist der Stapel gut genug gemischt?

- Betrachte die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den n! vielen Permutationen des Stapel
- Beispiel:

Anfangsverteilung E: $E(id) = 1$,

$E(\pi) = 0$ sonst

Gleichverteilung U: $U(\pi) = \frac{1}{n!}$ für alle $\pi \in G_n$

3. Einmischen der obersten Karte

- Konzept der Variationsdistanz zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen Q_1, Q_2 :

$$||Q_1 - Q_2|| := \frac{1}{2} \sum_{\pi \in G_n} |Q_1(\pi) - Q_2(\pi)|$$

3. Einmischen der obersten Karte

- Konzept der Variationsdistanz zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen Q_1, Q_2 :

$$||Q_1 - Q_2|| := \frac{1}{2} \sum_{\pi \in G_n} |Q_1(\pi) - Q_2(\pi)|$$

- Gutes Mischen bedeutet, eine kleine Variationsdistanz zur Gleichverteilung zu erhalten

3. Einmischen der obersten Karte

Lemma: Setze $S := \{\pi \in G_n : Q_1(S) > Q_2(S)\}$

dann gilt:

$$||Q_1 - Q_2|| = max_{S \subseteq G_n} |Q_1(S) - Q_2(S)|$$

mit $0 \leq ||Q_1 - Q_2|| \leq 1$

Beweis: Tafel

3. Einmischen der obersten Karte

- Variationsdistanz zwischen der Anfangsverteilung und Gleichverteilung:

$$||\boldsymbol{E} - \boldsymbol{U}|| = \mathbf{1} - \frac{1}{n!}$$

3. Einmischen der obersten Karte

- Variationsdistanz zwischen der Anfangsverteilung und Gleichverteilung:

$$||E - U|| = 1 - \frac{1}{n!}$$

- Das ist immernoch schlecht gemischt. Wie lange muss also gemischt werden?

4. Stark gleichverteilte Halteregel

- Wird der Mischprozess nach k Schritten abgebrochen, dann gilt für alle Permutationen des Kartenspiels die Gleichverteilung

4. Stark gleichverteilte Halteregel

- Wird der Mischprozess nach k Schritten abgebrochen, dann gilt für alle Permutationen des Kartenspiels die Gleichverteilung

$$Prob[X_k = \pi | T = k] = \frac{1}{n!}$$

4. Stark gleichverteilte Halteregel

- Wird der Mischprozess nach k Schritten abgebrochen, dann gilt für alle Permutationen des Kartenspiels die Gleichverteilung

$$Prob[X_k = \pi | T = k] = \frac{1}{n!}$$

für alle $\pi \in G_n$

4. Stark gleichverteilte Halteregel

Frage: Gibt es eine gute Halteregel für unsere Art des Mischens??

4. Stark gleichverteilte Halteregel

Frage: Gibt es eine gute Halteregel für unsere Art des Mischens??

Antwort: Ja, gibt es:

> "Halte das mischen, sobald die vormals unterste Karte eingemischt wird"

5. Vom Sammeln zum Spielen

- T_i : Zufallsvariable, die zählt wie oft gemischt werden muss bis erstmals i Karten unter der Karte n liegen

5. Vom Sammeln zum Spielen

- T_i : Zufallsvariable, die zählt wie oft gemischt werden muss bis erstmals i Karten unter der Karte n liegen

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + \ldots + (T_{n-1} - T_{n-2}) + (T_n - T_{n-1})$$

5. Vom Sammeln zum Spielen

- T_i : Zufallsvariable, die zählt wie oft gemischt werden muss bis erstmals i Karten unter der Karte n liegen

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + \ldots + (T_{n-1} - T_{n-2}) + (T_n - T_{n-1})$$

- $T_i - T_{i-1}$ Ist die Zeit die es dauert die oberste Karte innerhalb der i möglichen Stellen unter Karte n einzumischen

5. Vom Sammeln zum Spielen

- Vergleich mit dem Bildchensammler:

5. Vom Sammeln zum Spielen

- Vergleich mit dem Bildchensammler:
- V_i: Anzahl der Bilder, die er kauft bis er i verschiedene Bildchen hat

5. Vom Sammeln zum Spielen

- Vergleich mit dem Bildchensammler:
- V_i: Anzahl der Bilder, die er kauft bis er i verschiedene Bildchen hat

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + \ldots + (T_{n-1} - T_{n-2}) + (T_n - T_{n-1})$$

$$V_n = V_1 + (V_2 - V_1) + \ldots + (V_{n-1} - V_{n-2}) + (V_n - V_{n-1})$$

5. Vom Sammeln zum Spielen

- Vergleich mit dem Bildchensammler:
- V_i: Anzahl der Bilder, die er kauft bis er i verschiedene Bildchen hat

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + \ldots + (T_{n-1} - T_{n-2}) + (T_n - T_{n-1})$$

$$V_n = V_1 + (V_2 - V_1) + \ldots + (V_{n-1} - V_{n-2}) + (V_n - V_{n-1})$$

daher:

$$Prob[T_i - T_{i-1} = j] = Prob[V_{n-i+1} - V_{n-i} = j]$$

5. Vom Sammeln zum Spielen

- Analog zum Bildchensammler gilt daher für die Wahrscheinlichkeit öfter als $k = \lceil n \log n + cn \rceil$ zu mischen:

$$Prob[T > k] \leq e^{-c}$$

5. Vom Sammeln zum Spielen

- Analog zum Bildchensammler gilt daher für die Wahrscheinlichkeit öfter als $k = \lceil n \log n + cn \rceil$ zu mischen:

$$Prob[T > k] \leq e^{-c}$$

- Nach $k = \lceil n \log n + cn \rceil$ - maligem Mischen

  ist der Stapel nun "zufällig gemischt"

5. Vom Sammeln zum Spielen

Fazit:

Bei einem Kartenspiel mit 52 Karten muss mindestens $n \log n \approx 205$ die oberste Karte in den Stapel gesteckt werden, damit das Kartenspiel “zufällig” gemischt ist.

6. Riffle Shuffle (Bogenmischen)

Wiederholung (Einmischen der obersten Karte):

- Bei einem Kartenspiel mit 52 Karten muss mindestens $n \log n \approx 205$ die oberste Karte in den Stapel gesteckt werden, damit das Kartenspiel “zufällig” gemischt ist.

- Die Variationsdistanz zur Gleichverteilung ist beschränkt durch: $d(k) := ||Top^{*k} - U|| \leq e^{-c}$

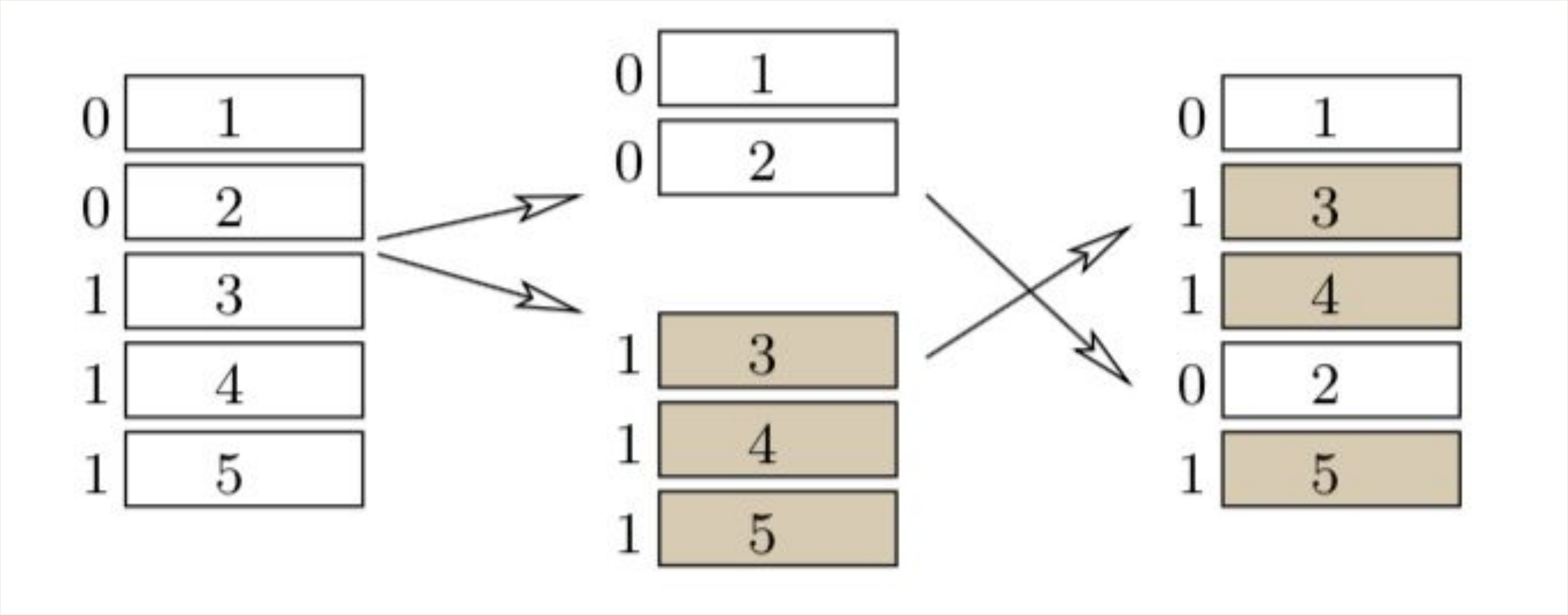
6. Riffle Shuffle (Bogenmischen)

Vorgehen:

1. Teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleich große Teile
2. Mische beide Stapel in unregelmäßigen Mustern wieder zusammen

6.1 Einführende Überlegungen

- Ein Mischschritt führt zu einer Permutation $\pi \in G_n$ des Kartenspiels
- Es gibt genau $2^n - n$ verschiedene Permutationen



6.1 Einführende Überlegungen

- Teilt man den Stapel der Größe n in zwei Stapel der Größen t bzw. n - t so gibt es $\binom{n}{t}$ viele Möglichkeiten den Stapel ineinander zu mischen

6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

1. Variante:

$$Rif : G_n \to \mathbb{R}$$

$$Rif(\pi) := \begin{cases} \frac{n+1}{2^n} & f\ddot{u}r \quad \pi = id, \\ \frac{1}{2^n} & wenn\ \pi\ aus\ zwei\ Folgen\ besteht, \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

2. Variante:

- Mit der Wahrscheinlichkeit $\binom{n}{t}\frac{1}{2^n}$ heben wir t Karten vom Stapel ab
- Setze $r := t$ und $l := n - t$
- Mische die Karten mit den Wahrscheinlichkeiten

  $\frac{r}{r+l}$ für die rechte Hand und

  $\frac{l}{r+l}$ für die linke Hand

6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

3. Variante *(inverses Mischen)*:

- Gehe durch den Stapel und markiere jede Karte mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder mit einer “0” oder einer “1”
- Platziere alle mit “0” markierten Karten entsprechend ihrer relativen Ordnung auf den mit “1” markierten Karten

$\longrightarrow$ *Alle drei Varianten beschreiben dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung!*

6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

1.<=>3.

- Jede von *id* verschiedene Permutation hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$
- $n + 1$ besteht die Möglichkeit, dass durch inverses Mischen *id* erzeugt wird

6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

1.<=>2.

- Das Abheben von $\binom{n}{t}\frac{1}{2^n}$ Karten mit anschließendem Mischen ergibt:

$$\binom{n}{t}\frac{1}{2^n}\frac{t!(n-t)!}{n!}$$

$$= \binom{n}{t}\frac{1}{2^n}\frac{1}{\binom{n}{t}}$$

$$= \frac{1}{2^n}$$

6.3 Schlussfolgerung

Satz: *Nach k-maligem zufälligem Ineinanderschieben eines Stapels von n Karten ist die Variationsdistanz von der Gleichverteilung höchstens*

$$||Rif^{*k} - U|| \leq 1 - \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i}{2^k})$$

6.3 Schlussfolgerung

Beweis:

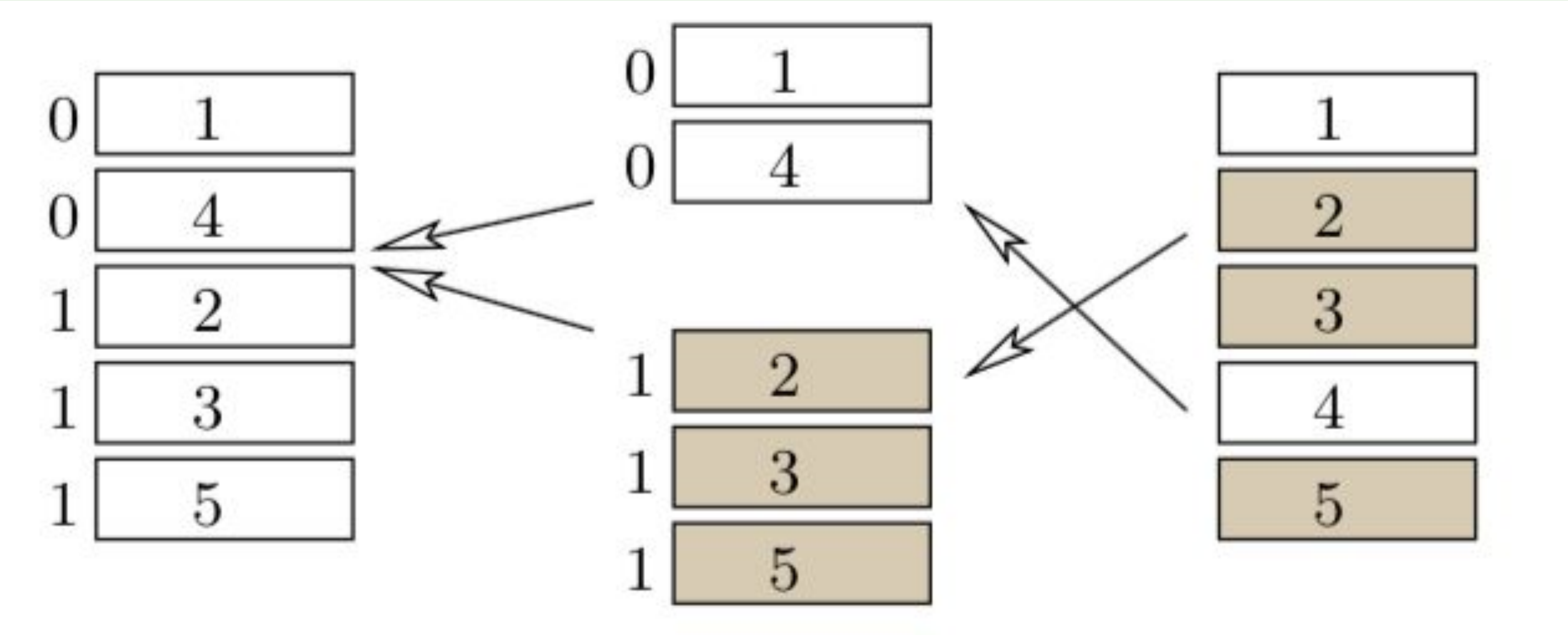
- Umgekehrte Mischungsschritte entsprechen der durch $\overline{Rif}(\pi) := Rif(\pi^{-1})$ gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Da jede Permutation ein eindeutiges Inverses hat und $U(\pi) = U(\pi^{-1})$ gilt, folgt:

$$||Rif^{*k} - U|| = ||\overline{Rif}^{*k} - U||$$

("Umkehrlemma von Reeds")

6.3 Schlussfolgerung

- In einem umgekehrten Mischungsschritt wird jeder Karte eine Ziffer 0 oder 1 zugewiesen
- Nach *k* Mischungsschritten hat jede Karte eine Folge von *k* Ziffern



6.3 Schlussfolgerung

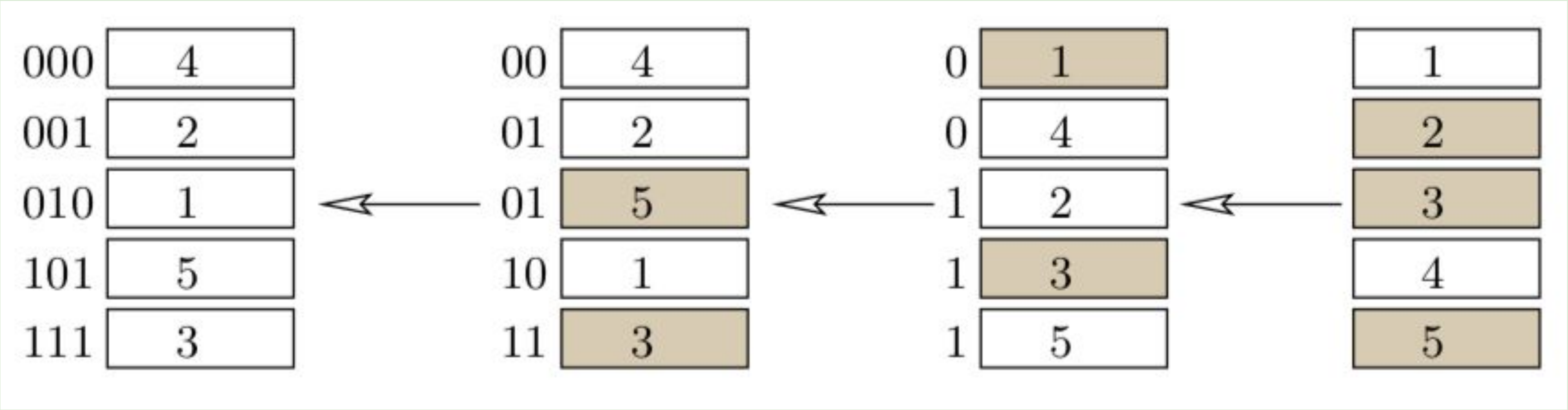
Halteregel: “HALT, sobald alle Karten unterschiedliche Ziffernfolgen haben”

Dies ist eine gute Regel, da:

- Gleiche Binärzahlen auf eine relative Ordnung bezüglich dem Ausgangsstapel hindeuten
- Gleichverteilte Binärzahlen auf eine Gleichverteilung bezüglich den Permutationen des Kartenspiels schließen lassen

6.3 Schlussfolgerung

Beispiel für $n = 5$:



- Zum Schluss sind alle Karten im Stapel nach aufsteigenden Binärzahlen $b_k \dots b_1$ sortiert

6.3 Schlussfolgerung

- Die Laufzeit T hat die Zufallsverteilung des **Geburtstagsparadoxon** mit $K = 2^k$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass nach k Mischschritten der Stapel noch nicht ausreichend gemischt ist:

$$Prob[T > k] \leq 1 - \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i}{2^k})$$

Dies beschränkt die Variationsdistanz, also:

$$||Rif^{*k} - U|| = ||\overline{Rif}^{*k} - U|| \leq 1 - \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i}{2^k})$$

6.3 Schlussfolgerung

Wie oft muss also gemischt werden?

- Setze $k := 2\log_2(cn)$ $für$ $c \geq 0$ dann ergibt sich:

$$P[T > k] \approx 1 - e^{-\frac{1}{2c^2}} \approx \frac{1}{2c^2}$$

6.3 Schlussfolgerung

Wie oft muss also gemischt werden?

- Setze $k := 2\log_2(cn)\ \text{für}\ c \geq 0$ dann ergibt sich:

$$P[T > k] \approx 1 - e^{-\frac{1}{2c^2}} \approx \frac{1}{2c^2}$$

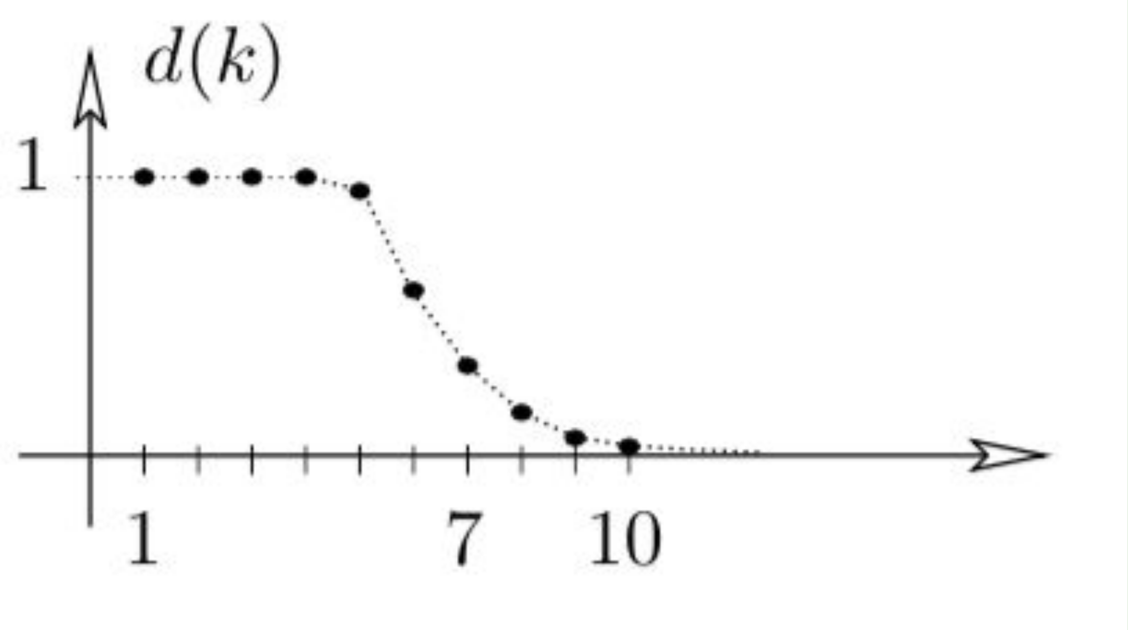
- Für n = 52:

  $d(10) \leq 0.73$, $d(12) \leq 0.28$, $d(14) \leq 0.08$

6.3 Schlussfolgerung

- Alternative Ergebnisse (D. Bayer & P. Diaconis):

k	$d(k)$
1	1.000
2	1.000
3	1.000
4	1.000
5	0.952
6	0.614
7	0.334
8	0.167
9	0.085
10	0.043



Quellen

- Martin Aigner, Günter M. Ziegler: Das BUCH der Beweise, Dritte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
- ftp://ftp.stat.math.ethz.ch/Teaching/kuensch/el-wkeit.pdf
- https://cornellmath.wordpress.com/2009/04/21/card-shuffling-ii-the-riffle-shuffle/
- https://www.youtube.com/watch?v=l7lP9y7Bb5g (Kartentrick)