Satz von Hall

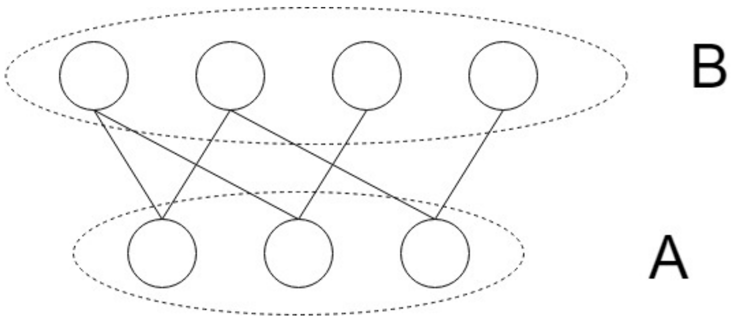
Was er aussagt und wie er zu beweisen ist

Luis Huilca

1 Benötigtes Vorwissen

1.1 Bipartite Graphen

Definition eines bipartiten Graphen: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, wenn sich die Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen aufteilen lässt ($V = A \cup B$ *und* $A \cap B = \emptyset$), sodass alle Kanten einen Knoten von A mit einen Knoten aus B verbinden.
Beispiel:

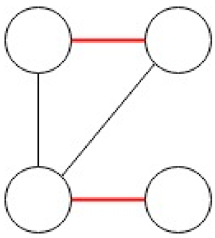


Graph 1

In diesem Beispiel sind die Knoten so angeordnet, dass man die bipartite Eigenschaft leicht sehen kann.

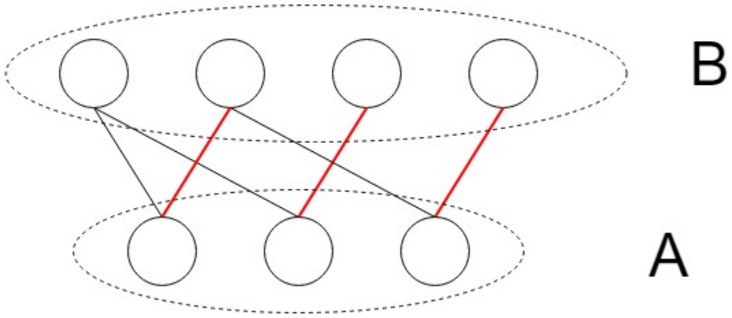
1.2 Matching

Ein Matching in Graph G = (V, E) ist eine Teilmenge $M \subseteq E$, sodass keine zwei Kanten der Menge M den gleichen Endpunkt haben. Man möchte bei vielen Problemstellungen ein Matching mit maximaler Kardinalität herausfinden, so auch beim Satz von Hall. Ein Beispiel für ein bestmögliches Matching kann man in Graph 2 sehen.



Graph 2

Die rot markierten Kanten stellen hier die Menge M dar. Alle Knoten sind gepaart worden. Im Zusammenhang mit bipartiten Graphen gibt es nun interessante Problemstellungen. Als Beispiel könnte Graph 1 (Seite 1) die Knotengruppe A eine Gruppe von Leuten die Arbeit suchen repräsentieren und B mögliche Jobs sein. Die Kanten deuten an, welche Person welchen Job ausführen könnte. Ein maximales Matching in einem bipartiten Graph ist, wenn jeder Knoten aus A eine Paarung kriegt. Eine Beispielbelegung könnte folgende sein:



maximales Matching für Graph 1

Mit solchen Zuordnungen beschäftigt sich nun der Satz von Hall.

2 Aussage des Satz von Hall

Definition des Heiratssatzes (wie er auch genannt wird):

Für einen bipartiten Graph $G = (V, E)$ mit den zwei disjunkten Knotenmengen A und B ($V = A \cup B \ \wedge \ A \cap B = \emptyset$; es gilt $|A| \leq |B|$), gibt es ein Matching der Kardinalität $|M| = |A|$, genau dann wenn gilt:
$\forall X \subseteq A : \ |N(X)| \geq |X|$

N(X) beschreibt hier die Nachbarschaft der Knotenmenge X.
Ausformuliert: $N(X) = \cup_{v \in X} \ N(v)$

Die informelle Erklärung: Wenn es ein maximales Matching gibt in einem bipartiten Graphen (beschrieben mit $|A| = |M|$), dann gibt es für alle Teilmengen von A mindestens so viel Nachbarn wie die Anzahl der Knoten in der Teilmenge selbst. In dem Satz ist X die Teilmengen und $|N(X)|$ die Anzahl der Nachbarn von X. Außerdem ist durch das "genau dann, wenn" impliziert, dass es in beide Richtungen gilt. Wenn also die Eigenschaft mit den Nachbarn auf einen bipartiten Graphen zutrifft ($|N(X)| \geq |X|$), dann gibt es auch ein Matching von $|M| = |A|$

3 Der Beweis

Da der Satz von Hall bidirektional ist, sprich in beide Richtungen gilt ("genau dann, wenn"), müssen beide Richtungen bewiesen werden.

"$\Rightarrow$"

Beweisen wir erst mal in die eine Richtung. Also wenn es im bipartiten Graph $G = ((A \cup B), E)$ ein Matching der Kardinalität $|M| = |A|$ gibt, dann gilt $|N(X)| \geq |X|$ (X wie bei 2. eine Teilmenge von A).

Beweis über Kontraposition:
Wenn es ein X gibt mit $|X| > N(X)$, kann es kein entsprechendes Matching geben, da gar nicht genug Matchings existieren. Es kann also nicht jeder Knoten in X einen Partner haben.
Widerspruch!

"$\Leftarrow$"

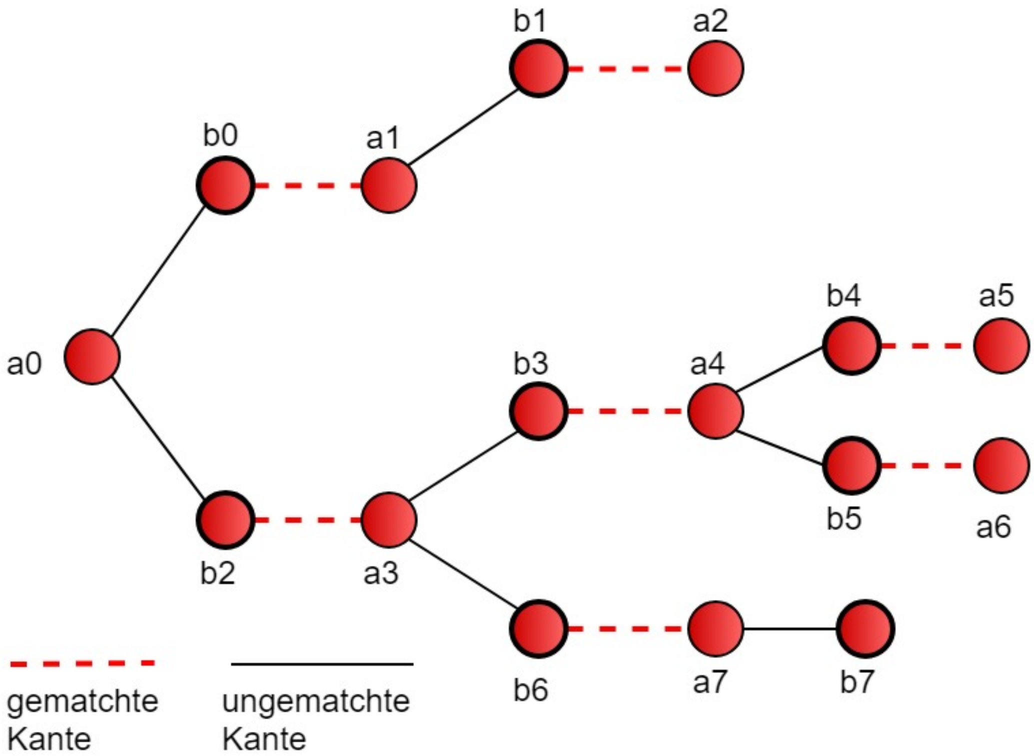
Wir müssen zeigen: Wenn $\forall X \subseteq A : |N(X)| \geq |X|$ gilt, dann gibt es ein Matching M mit $|M| = |A|$.

Beweis mit Widerspruch:
Annahme: es gilt $|N(X)| \geq |X|$ und es gibt **kein** Matching M mit $|M| = |A|$.
Sei M' ein Matching mit maximaler Kardinalität (bestmögliches Matching) mit $|M'| < |A|$, dann gilt folgendes **Lemma**: Es existiert ein Pfad mit 2 Eigenschaften
1. Der Pfad hat abwechselnd gematchte und ungematchte Kanten
2. Der Anfangs- und Endpunkt des Graphen sind ungematcht

Das Lemma hilft bei der Beweisführung, doch es muss erst mal bewiesen werden. Beginn Beweis Lemma:
Wenn $|M'| < |A|$ gilt, dann muss es einen Punkt a_0 in A geben, der eine Kante hat, die nicht in M' liegt. Von dort aus starten wir eine Pfadsuche. Die Kante muss zu einem Knoten in B führen (Eigenschaft bipartit). Dieser Knoten muss schon mit einem anderen gepaart sein, da sonst a_0 mit ihm gepaart wäre (zur Erinnerung: M' war maximal).Nun kann man die gematchte

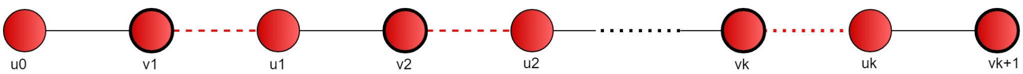
Kante weitersuchen und man findet wieder zu A. Das geht nun immer so weiter, sprich gematchte und ungematchte Kanten abwechselnd. 1. Eigenschaft des Lemmas gilt.
Da wir vorausgesetzt haben, dass die Anzahl der Nachbarn mindestens genauso groß ist $|N(X)| \geq |X|$, muss der gesuchte Pfad mit dem Endpunkt in B aufhören.
Die 2. Eigenschaft gilt somit auch. Lemma ist bewiesen.

Wenn wir den Pfad suchen, könnte eine Breitensuche wie folgt aussehen:

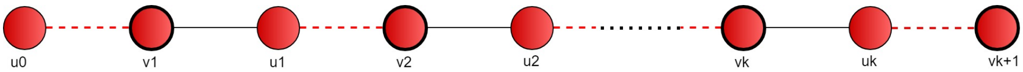


b_7 hat keinen weiteren Nachbarn mehr, also wäre der gesuchte Pfad in diesem Beispiel:
$a_0 \to b_2 \to a_3 \to b_6 \to a_7 \to b_7$

Wenn man eine solche Suche macht hat der gesuchte Pfad aus dem Lemma immer folgendes Muster:



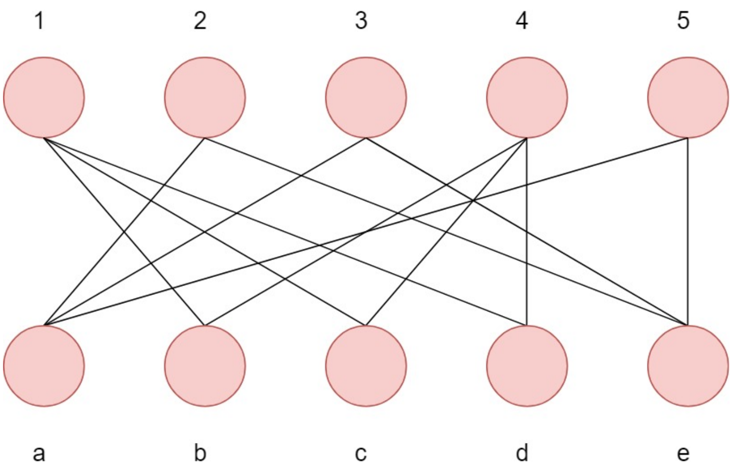
Hier zeigt sich schnell, dass man die ungematchten und gematchten umtauschen kann, es bildet sich:



Die neue abgebildete Matchingmenge M'' hat die Kardinalität:
$|M''| = |M'| + 1$
Das erzeugt nun einen Widerspruch, da M' mit maximaler Kardinalität gegeben war, man aber nun ein besseres Matching in Form von M'' gefunden hat. **Widerspruch!**

4 Anwendung des Satzes

Den Heiratssatz kann man gut für das Widerlegen eines perfekten Matchings (für bipartite Graphen) nutzen.
Hier ein Anwendungsbeispiel: gibt es bei diesem Graphen ein perfektes Matching?



Nein. Beweis: Für $|N(X)| \geq |X|$ wähle man $X = \{2, 3, 5\} \Rightarrow |X| = 3$.
$N(X) = \{a, e\} \Rightarrow |N(X)| = 2$
$2 \geq 3$

Widerspruch!
$\hookrightarrow$ Es gibt kein perfektes Matching.

Quellen

https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/hall-satz-von/3738
https://mathepedia.de/Paarungen_in_Graphen.html
https://www7.in.tum.de/um/courses/ds/ws0809/folien_generated/16-Graphen-Matchings.pdf
https://de.wikipedia.org/wiki/Heiratssatz

Videos:
https://youtu.be/5ICBG_2DC1M
https://youtu.be/a3InoaEJ-Ug
https://youtu.be/XQG9rXMlewI