

# DAS BUCH DER BEWEISE

## SIMPLEXE, DIE EINANDER BERÜHREN

---

Konrad Schön

07.02.2019

Institut für Informatik  
Humboldt-Universität zu Berlin



Vorwissen

Das Problem

Untere Schranke

Obere Schranke



# VORWISSEN

---

## Definition

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und seien  $v_0, \dots, v_k$  endlich viele Punkte eines  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$ . Man nennt diese Punkte *affin unabhängig*, falls für Skalare  $t_0, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  mit  $t_0 + \dots + t_k = 0$

$$v_0 t_0 + \dots + v_k t_k = 0 \implies t_0 = \dots = t_k = 0$$

gilt.



**Definition**

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und seien  $v_0, \dots, v_k$  affin unabhängige Punkte. Das von  $v_0, \dots, v_k$  aufgespannte *Simplex*  $\Delta$  ist die folgende Menge:

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^k t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}$$



## Definition

Die Punkte  $v_i$  werden *Eckpunkte* von  $\Delta$  und  $(t_0, \dots, t_k) \in [0, 1]^{k+1}$  *baryzentrische Koordinaten* genannt.

Die Zahl  $k$  ist die *Dimension des Simplex*. Ein Simplex der Dimension  $k$  wird auch kurz  $k$ -Simplex genannt.

Ein Simplex ist also einfach die konvexe Hülle von endlich vielen affin unabhängigen Punkten im  $\mathbb{R}^n$ .



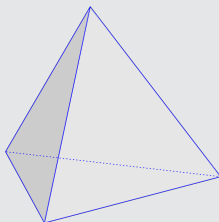
## Examples

- Ein 0-Simplex ist ein Punkt
- Ein 1-Simplex ist eine Strecke
- Ein 2-Simplex ist ein Dreieck



## Examples

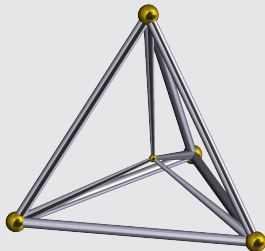
Ein 3-Simplex ist ein Tetraeder





## Examples

Ein 4-Simplex nennt man auch Pentachoron



# DAS PROBLEM

---

Wie viele  $d$ -dimensionale Simplexe kann man im  $\mathbb{R}^d$  anordnen, dass sie einander paarweise berühren, so dass der Schnitt von je zweien genau  $(d - 1)$ -dimensional ist?

Die Antwort auf dieses Problem wird im folgenden mit  $f(d)$  notiert.



## LÖSUNGSANSATZ: $d = 1$ UND $d = 2$

Ganz trivial gilt

$$f(1) = 2.$$

Aus der Abbildung folgt  $f(2) \geq 4$ .

Tatsächlich gilt  $f(2) = 4$ .

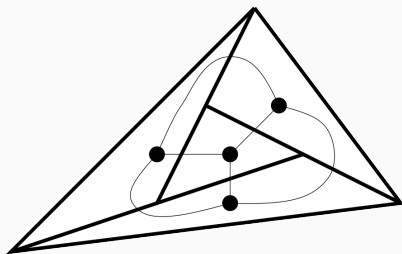


Abbildung 1: Vier Dreiecke



$$d = 3$$

„In drei Dimensionen ist  $f(3) \geq 8$  noch relativ einfach zu sehen“[1]



$$d = 3$$

„In drei Dimensionen ist  $f(3) \geq 8$  noch relativ einfach zu sehen“[1]

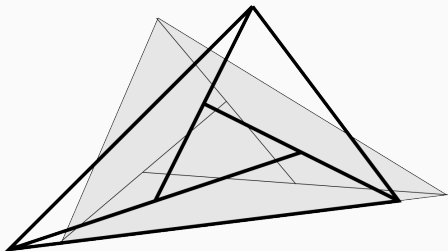
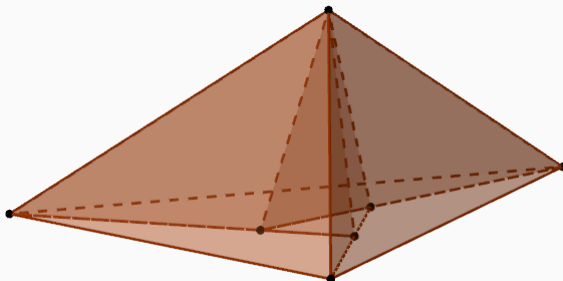


Abbildung 2:  $f(3) \geq 8$



$$d = 3$$



**Abbildung 3:** Eine Hälfte der Anordnung von Dreiecken für  $d = 3$  in dreidimensionaler Darstellung



## └ Das Problem

└  $d = 3$

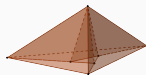


Abbildung 3: Eine Hälfte der Anordnung von Dreiecken für  $d = 3$  in dreidimensionaler Darstellung

- 1965 hat Baston  $f(3) \leq 9$  bewiesen.
- 1991 hat Zaks schließlich  $f(3) = 8$  bewiesen.
- Bisher  $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8$
- Vermutung liegt nahe, die erstmals 1956 von Bagemihl aufgestellt wurde



## Vermutung

Die maximale Anzahl von einander paarweisen berührenden  $d$ -Simplexen im  $\mathbb{R}^n$  ist

$$f(d) = 2^d$$



## UNTERE SCHRANKE

---

$$f(d) \geq 2^d$$

### Satz

Für jedes  $d \geq 2$  gibt es eine Anordnung von  $2^d$  einander paarweise berührenden  $d$ -Simplexen im  $\mathbb{R}^d$  mit einer Geraden, die für jedes der  $2^d$  Simplexe durch das Innere geht.



Beweis erfolgt durch Induktion:

Für  $d = 2$  existiert für die vier Dreiecke eine solche Durchstoßgerade  $l$ .

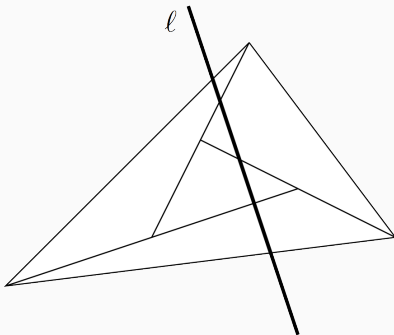


Abbildung 4: Durchstoßgerade für  $d=2$

Betrachte eine  $d$ -dimensionale Anordnung von einander berührenden Simplexen, die eine Durchstoßgerade  $l$  hat.

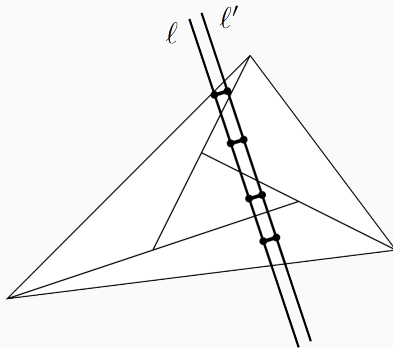
Dann gilt:

Jede zu  $l$  parallele Gerade  $l'$  in ihrer Nähe ist ebenfalls eine Durchstoßgerade.



Wenn  $l$  und  $l'$  parallel und nahe genug beieinander liegen, dann enthält jedes Simplex auch eine kürzeste Verbindungsstrecke zwischen den beiden Geraden.





**Abbildung 5:** Eine simple Darstellung der Idee im  $d$ -dimensionalen für  $d = 2$





Abbildung 5: Eine simple Darstellung der Idee im  $d$ -dimensionalen für  $d = 2$

- Beschränkter Teil der Geraden innerhalb der Simplexe
- Zwei weitere Verbindungslinien außerhalb -> Rechteck, das alle Verbindungslinien enthält
- Leiter, jede Sprosse ein Simplex
- Koord-transf  $R^1 = \{(x_1, x_2, 0, \dots, 0)^T : -1 \leq x_1 \leq 0; -1 \leq x_2 \leq 1\}$



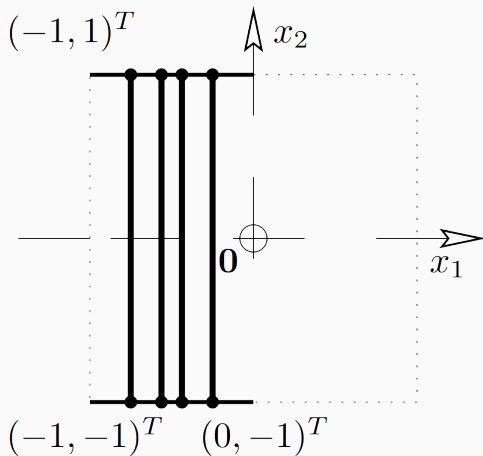


Abbildung 6: Ergebnis der Koordinatentransformation



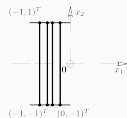


Abbildung 6: Ergebnis der Koordinatentransformation

- Anordnung  $\Sigma^1$  von einander berührenden Simplexen mit  $x_1$ -Achse als Durchstoßgerade
- Jedes Simplex enthält im Inneren Strecke

$$S^1(\alpha) = \{(\alpha, x_2, 0, \dots, 0)^T : -1 \leq x_2 \leq 1\}$$

für ein  $\alpha$  mit  $-1 < \alpha < 0$

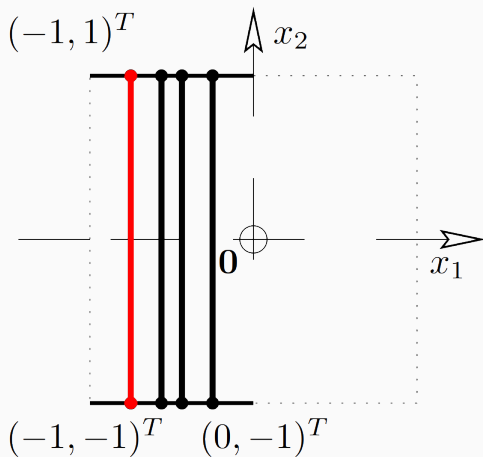
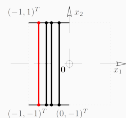


Abbildung 7: Beispielgerade  $S^1(\alpha)$  im Inneren eines Simplexes



Abbildung 7: Beispielgerade  $S^2(\omega)$  im Inneren eines Simplexes

- Zweite Anordnung  $\Sigma^2$  durch spiegeln an  $x_1 = x_2$
- Hat  $x_2$ -Achse als Durchstoßgerade
- Jedes Simplex enthält Strecke

$$S^2(\beta) = \{(x_1, \beta, 0, \dots, 0)^T : -1 \leq x_1 \leq 1\}$$

mit  $-1 < \beta < 0$

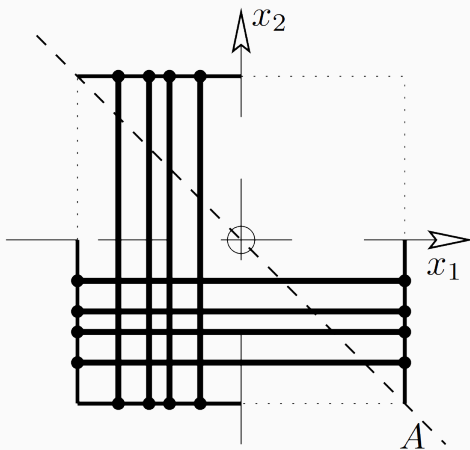


Abbildung 8: Ergebnis der Spiegelung



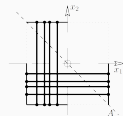


Abbildung 8: Ergebnis der Spiegelung

- jede Strecke  $S^1(\alpha)$  schneidet jede Strecke  $S^2(\beta)$
- Inneres jedes Simplex von  $\Sigma^1$  schneidet Innere jedes Simplex von  $\Sigma^2$
- neue Koordinate  $x_{d+1}$ ,  $\Sigma := \{conv(P_i \cup \{-e_{d+1}\}) : P_i \in \Sigma^1\} \cup \{conv(P_j \cup \{-e_{d+1}\}) : P_j \in \Sigma^2\}$
- $conv X$  ist die konvexe Hülle von  $X$ , die kleinste konvexe Menge, die  $X$  enthält
- $\Sigma$  ist Anordnung von  $2^{d+1}$  einander berührenden  $(d+1)$ -Simplexen
- Antidiagonale  $A = \{(-x, x, 0, \dots, 0)^T : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$  schneidet alle Strecken  $S^1(\alpha)$  und  $S^2(\beta)$
- leicht „kippen“ führt zu Gerade  $L_\varepsilon = \{(-x, x, 0, \dots, 0, \varepsilon x)^T : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  die für sehr kleine  $\varepsilon$  alle Simplexe durchstößt

## OBERE SCHRANKE

---

$$f(d) < 2^{d+1}$$

## Satz

Für alle  $d \geq 1$  gilt  $f(d) < 2^{d+1}$ .





Gegeben sei eine Anordnung von  $r$  einander berührenden  $d$ -Simplexten  $P_1, P_2, \dots, P_r$  im  $\mathbb{R}^d$ .

Wir nummerieren die durch die Seitenflächen der  $P_i$  aufgespannten Hyperebenen  $H_1, H_2, \dots, H_s$ .

Wir wählen für jede dieser beliebig eine positive Seite  $H_i^+$  und nennen die andere  $H_i^-$ .



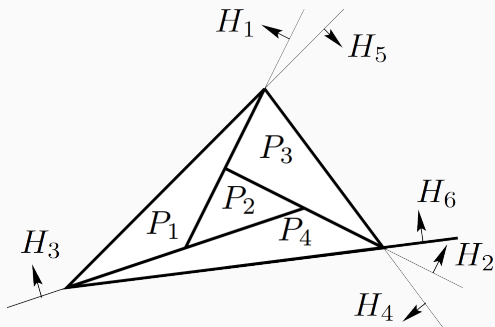


Abbildung 9: Beispiel für  $d = 2, r = 4$  mit  $s = 6$

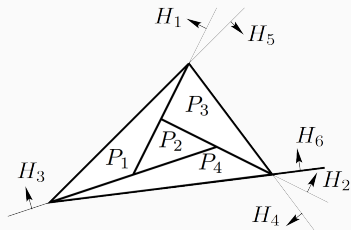


Wir konstruieren eine  $(r \times s)$ -Matrix  $B$  mit Einträgen aus  $\{-1, 0, 1\}$  wie folgt:

$$B_{ij} = \begin{cases} +1 & P_i \text{ hat Facette in } H_j \text{ und } P_i \subseteq H_j^+ \text{ gilt,} \\ -1 & P_i \text{ hat Facette in } H_j \text{ und } P_i \subseteq H_j^- \text{ gilt,} \\ 0 & P_i \text{ hat keine Facette in } H_j. \end{cases}$$



# BEISPIELMATRIX FÜR $d = 2$



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Jede Zeile enthält genau  $d + 1$  von Null verschiedene Einträge, somit genau  $s - (d + 1)$  viele Nullen
- Für jedes Paar von Zeilen eine Spalte, in der eine Zeile den Eintrag  $+1$  hat, während die andere eine  $-1$  hat
- Die Zeilen von  $B$  „stellen die Simplexe  $P_i$  dar“



- Jede Zeile von  $B$  ersetzen
- Alle Nullen durch  $+1$  oder  $-1$  ersetzen
- $C$  hat insgesamt  $2^{s-d-1} \cdot r$  Zeilen



- Jede Zeile von  $B$  ersetzen
- Alle Nullen durch  $+1$  oder  $-1$  ersetzen
- $C$  hat insgesamt  $2^{s-d-1} \cdot r$  Zeilen

- Da jede Zeile  $s - (d + 1)$  Nullen hat, und  $B$  insgesamt  $r$  Zeilen hat, hat
- Die ersten  $2^{s-d-1}$  Zeilen sind aus der ersten Zeile abgeleitet, die zweiten  $2^{s-d-1}$  aus der zweiten, usw

# BEISPIELMATRIX $c$ FÜR $d = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$





└ Obere Schranke

└ Beispielmatrix  $C$  für  $d = 2$ 

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- Alle Zeilen von  $C$  verschieden
- Wenn aus der selben Zeile abgeleitet verschieden weil 0 verschieden ersetzt
- Wenn aus unterschiedlichen Zeilen abgeleitet verschieden wegen zweiter Eigenschaft der Matrix  $B$

- Zeilen von  $C$  sind  $\pm 1$ -Vektoren der Länge  $s$
- Gibt  $2^s$  verschiedene solcher Vektoren
- $C$  hat höchstens  $2^s$  Zeilen

$$\implies 2^{s-d-1} \cdot r \leq 2^s \iff r \leq 2^{d+1}$$



## Behauptung

Nicht alle möglichen  $\pm 1$ -Vektoren treten in  $C$  auf, was die Ungleichung  $2^{s-d-1} \cdot r < 2^s$  liefert und somit

$$r < 2^{d+1}$$



- Jede Zeile von  $C$  stellt eine Teilmenge eines Simplex  $P_j$  dar
- Wähle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $x \notin H_j, x \notin P_i$  für alle  $j, i$
- Aus  $x \pm 1$ -Vektor ableiten
- Dieser Vektor tritt nicht in  $C$  auf



- Jede Zeile von  $C$  stellt eine Teilmenge eines Simplex  $P_i$  dar
- Wähle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $x \notin H_i$ ,  $x \notin P_i$  für alle  $j, i$
- Aus  $x$  :1-Vektor ableiten
- Dieser Vektor tritt nicht in  $C$  auf

- Jede Zeile ist Schnitt von Halbräumen
- Ableiten des Vektors  $v$  durch Notierung für jedes  $j$ , ob  $x \in H_j^+$  oder  $x \in H_j^-$
- Nicht enthalten, da

$$\bigcap_{j:v=1} H_j^+ \cap \bigcap_{j:v=-1} H_j^-$$

$x$  enthält und somit nicht in einem der Simplexe enthalten

- Im folgenden Bsp: erste Zeile von  $C$  stellt das grau schattierte Dreieck dar

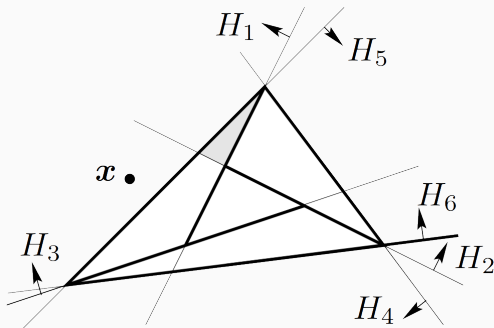


Abbildung 10: Aus  $x$  folgt  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , welcher nicht in  $C$  auftritt.



VIELEN DANK!



## LITERATUR

---

- [1] AIGNER, Martin ; ZIEGLER, Günter M.: *Das BUCH der Beweise*.  
5. Auflage. Berlin : Springer, 2018. – ISBN 978-3-662-57766-0

