Bertrandsches Postulat

Jan Hanes

13. Dezember, 2018

Fragestellung

- Unendlich viele Primzahlen!
- Sind zwei aufeinanderfolgende Primzahlen beliebig weit voneinander entfernt?

Das Postulat

- 1845 Joseph Bertrand erstellt Theorem

Das Postulat

- 1845 Joseph Bertrand erstellt Theorem
- $\forall n \geq 1 \quad \exists p \in P : \qquad n < p \leq 2n$
- $p_n < p_{n+1} < 2p_n \quad p_i \in P$

Das Postulat

- 1845 Joseph Bertrand erstellt Theorem
- $\forall n \geq 1 \quad \exists p \in P: \qquad n < p \leq 2n$
- $p_n < p_{n+1} < 2p_n \quad p_i \in P$
- Bertrand selbst nur bis 10^6 gezeigt

Die Beweise

- erstmals bewiesen von Chebyschëv 1850
- 1919 ein anderer Beweis von Ramanujan mit Einführung von Ramanujan Primzahlen
- 1932 der Beweis von Paul Erdős

Der Beweis von Erdős

Teil 1 Satz bis $n \leq 511$ zeigen

Der Beweis von Erdős

Teil 1 Satz bis $n \leq 511$ zeigen

Teil 2 z.Z. $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$

Der Beweis von Erdős

Teil 1 Satz bis $n \leq 511$ zeigen

Teil 2 z.Z. $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$

Teil 3 Abschätzung von p in $\binom{2n}{n}$ [Satz von Legendre]

Der Beweis von Erdős

Teil 1 Satz bis $n \leq 511$ zeigen

Teil 2 z.Z. $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$

Teil 3 Abschätzung von p in $\binom{2n}{n}$ [Satz von Legendre]

Teil 4 Teil(3) und Teil(2) zusammen mit [$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$] führt zu $4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)}$

Der Beweis von Erdős

Teil 1 Satz bis $n \leq 511$ zeigen

Teil 2 z.Z. $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$

Teil 3 Abschätzung von p in $\binom{2n}{n}$ [Satz von Legendre]

Teil 4 Teil(3) und Teil(2) zusammen mit [$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$] führt zu $4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)}$

Teil 5 P(n) mithilfe vom Logarithmus abschätzen und damit zum Beweisende

Teil 1

- Folge von Primzahlen, mit $P_n < P_{n+1} \leq 2P_n$ bis 511
- damit ist Postulat bis 511 (bzw. 520) bewiesen

Teil 2

- z.Z. $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$

Teil 2

- z.Z. $\prod_{p\leq x} p \leq 4^{x-1}$
- Es genügt zu zeigen: $\prod_{p\leq q} p \leq 4^{q-1}$ mit q ist die größte Primzahl kleiner als x
- mit vollständiger Induktion

Teil 2

- z.Z. $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$
- Es genügt zu zeigen: $\prod_{p \leq q} p \leq 4^{q-1}$ mit q ist die größte Primzahl kleiner als x
- mit vollständiger Induktion

I.A. $q = 2 \quad \prod_{p \leq 2} p = 2 \leq 4 = 4^1 = 4^{2-1}$ gerade Primzahlen fallen weg

Teil 2

- z.Z. $\prod_{p\leq x} p \leq 4^{x-1}$
- Es genügt zu zeigen: $\prod_{p\leq q} p \leq 4^{q-1}$ mit q ist die größte Primzahl kleiner als x
- mit vollständiger Induktion

I.A. $q = 2 \quad \prod_{p\leq 2} p = 2 \leq 4 = 4^1 = 4^{2-1}$ gerade Primzahlen fallen weg

I.S. $q = 2m+1 \quad \prod_{p\leq 2m+1} p = \prod_{p\leq m+1} p \cdot \prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq 4^m \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}$

Satz von Legendre

Aussage Die Zahl n! enthält Primfaktor p genau $\sum_{k\geq 1}\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ mal

Satz von Legendre

Aussage Die Zahl n! enthält Primfaktor p genau $\sum_{k\geq 1}\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ mal

Beweis $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ offensichtlich sind $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ durch p teilbar

Satz von Legendre

Aussage Die Zahl n! enthält Primfaktor p genau $\sum_{k\geq 1}\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ mal

Beweis $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ offensichtlich sind $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ durch p teilbar

- genauso gilt dies für p^2 welches dann extra mitgezählt werden muss, da an den Stellen p zwei mal auftaucht

Satz von Legendre

Aussage Die Zahl n! enthält Primfaktor p genau $\sum_{k\geq1}\lfloor\frac{n}{p^k}\rfloor$ mal

Beweis $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ offensichtlich sind $\lfloor\frac{n}{p}\rfloor$ durch p teilbar

- genauso gilt dies für p^2 welches dann extra mitgezählt werden muss, da an den Stellen p zwei mal auftaucht
- usw. bis $p^k > n$ bzw. ab da sind die Summanden 0

Teil 3

- Wir betrachten $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$

Teil 3

- Wir betrachten $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$

S.v.L. $p \in P$ ist genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

Teil 3

- Wir betrachten $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$

S.v.L. $p \in P$ ist genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

- $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor < 2$

Teil 3

- Wir betrachten $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$

S.v.L. $p \in P$ ist genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

- $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor < 2$
- also ist jeder Summand höchstens 1

Teil 3

- Wir betrachten $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$

S.v.L. $p \in P$ ist genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

- $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor < 2$
- also ist jeder Summand höchstens 1

Es folgt $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \leq max\{r | p^r \leq 2n\}$

Teil 3

- Wir betrachten $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$

S.v.L. $p \in P$ ist genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

- $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor < 2$
- also ist jeder Summand höchstens 1

Es folgt $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \leq max\{r | p^r \leq 2n\}$

1. größte Potenz von p die $\binom{2n}{n}$ teilt ist nicht größer als 2n

Teil 3

- Wir betrachten $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$

S.v.L. $p \in P$ ist genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

- $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor < 2$
- also ist jeder Summand höchstens 1

Es folgt $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \leq max\{r | p^r \leq 2n\}$

1. größte Potenz von p die $\binom{2n}{n}$ teilt ist nicht größer als 2n
2. bei $p > \sqrt{2n}$ ist der Primfaktor höchtens ein mal in $\binom{2n}{n}$

Teil 3

- Wir betrachten $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$

S.v.L. $p \in P$ ist genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

- $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor < 2$
- also ist jeder Summand höchstens 1

Es folgt $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \leq max\{r | p^r \leq 2n\}$

1. größte Potenz von p die $\binom{2n}{n}$ teilt ist nicht größer als 2n
2. bei $p > \sqrt{2n}$ ist der Primfaktor höchtens ein mal in $\binom{2n}{n}$
3. bei $\frac{2}{3} n < p < n$ gilt, dass p in $\binom{2n}{n}$ nicht vorkommt

Eine wichtige Ungleichung

- betrachte die Binomialkoeffizienten

Eine wichtige Ungleichung

- betrachte die Binomialkoeffizienten
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Eine wichtige Ungleichung

- betrachte die Binomialkoeffizienten
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- die Folge der Binomialkoeffizienten bei festem n ist am größten bei $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Eine wichtige Ungleichung

- betrachte die Binomialkoeffizienten
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- die Folge der Binomialkoeffizienten bei festem n ist am größten bei $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- betrachte $4^n = (1+1)^{2n}$ bei $n > 0$

Eine wichtige Ungleichung

- betrachte die Binomialkoeffizienten
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- die Folge der Binomialkoeffizienten bei festem n ist am größten bei $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- betrachte $4^n = (1+1)^{2n}$ bei $n > 0$
- $4^n \leq 2n \cdot \binom{2n}{n} \Rightarrow \frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$

Teil 4

für $n \geq 3$ folgt:

- $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$

Teil 4

für $n \geq 3$ folgt:

- $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$
- $\frac{4^n}{2n} < ((2n)^{\sqrt{2n}}) \cdot (4^{\frac{2}{3}n}) \cdot (2n)^{P(n)}$ mit $P(n) :=$ Anzahl der Primzahlen zwischen n und 2n

Teil 4

für $n \geq 3$ folgt:

- $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$
- $\frac{4^n}{2n} < ((2n)^{\sqrt{2n}}) \cdot (4^{\frac{2}{3}n}) \cdot (2n)^{P(n)}$ mit $P(n) :=$ Anzahl der Primzahlen zwischen n und 2n
- $4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)}$

Teil 5

- wendet man den Logarithmus zur Basis 2 an erhält man: $P(n) > \frac{2n}{3\log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1)$

Teil 5

- wendet man den Logarithmus zur Basis 2 an erhält man: $P(n) > \frac{2n}{3\log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1)$
- Man muss nur zeigen, das ab genügend großen n der rechte Teil positiv wird (bzw. $n = 2^9 = 512$ s.Teil 1)

Teil 5

- wendet man den Logarithmus zur Basis 2 an erhält man: $P(n) > \frac{2n}{3\log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1)$
- Man muss nur zeigen, das ab genügend großen n der rechte Teil positiv wird (bzw. $n = 2^9 = 512$ s.Teil 1)
- Es folgt $\frac{\sqrt{2n}-1}{3\log_2(2n)} > \frac{2n-1}{2n}$. Also genügt es zu zeigen, $\sqrt{2n} - 1 > 3\log_2(2n)$ für $n \geq 2^9$

Teil 5

- Für $n = 2^9$ gilt die vorherige Ungleichung $(31 > 30)$

Teil 5

- Für $n = 2^9$ gilt die vorherige Ungleichung $(31 > 30)$
- vergleiche $\frac{d}{dx}(\sqrt{x} - 1)$ und $\frac{d}{dx} 3 \log_2 x$

Teil 5

- Für $n = 2^9$ gilt die vorherige Ungleichung $(31 > 30)$
- vergleiche $\frac{d}{dx}(\sqrt{x} - 1)$ und $\frac{d}{dx} 3 \log_2 x$
- $\sqrt{x} - 1$ steigt ab $x = (\frac{6}{\ln(2)})^2$ schneller als $3 \log_2 x$, und daher auch bei $x = 2^{10}$

$\square$

Quellen

- M.Aigner, G.M.Ziegler. “Das Bertrandsche Postulat” in *Buch der Beweise*, 4.Auflage, Berlin,Heidelberg: Spinger Verlag, 2015
- Jonathan Sondow (2009) “Ramanujan Primes and Bertrand's Postulate ”, *The American Mathematical Monthly*, 116:7, 630-635, Available: `https://doi.org/10.1080/00029890.2009.11920980`[13.12.2018]
- “Bertrand's Postulate ”Internet: `https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand's_postulate`,06.07.2018[13.12.2018]