Invarianz- und Extremalprinzip

Hanke Guo

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik

20. Dezember 2018

Das Invarianzprinzip

- Oft werden in Algorithmen, Spielen, etc. wiederholt bestimmte Transformationen angewendet
- Eine Invariante ist eine Größe, die sich unter diesen Transformationen nicht verändert
- Invarianzprinzip: *Wenn sich etwas verändert, achte darauf, was gleich bleibt!*

Zahlen an der Tafel

- Sei n eine ungerade natürliche Zahl
- An einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$

Zahlen an der Tafel

- Sei n eine ungerade natürliche Zahl
- An einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \dots, 2n$
- Wähle zwei beliebige Zahlen a, b an der Tafel und ersetze sie durch ihre Differenz $|a - b|$
- Wiederhole diesen Schritt, bis nur noch eine Zahl übrig ist

Zahlen an der Tafel

- Sei n eine ungerade natürliche Zahl
- An einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$
- Wähle zwei beliebige Zahlen a, b an der Tafel und ersetze sie durch ihre Differenz $|a - b|$
- Wiederhole diesen Schritt, bis nur noch eine Zahl übrig ist
- Zeige, dass diese letzte Zahl ungerade sein muss!

Zahlen an der Tafel: Beweis

- Wir betrachten die Summe S aller Zahlen, die momentan an der Tafel stehen

Zahlen an der Tafel: Beweis

- Wir betrachten die Summe S aller Zahlen, die momentan an der Tafel stehen
- Ersetzen wir die Zahlen a und b durch $|a-b|$, so ändert sich der Wert von S um
  - $-(a+b)+(b-a)=-2a$, falls $a \leq b$,
  - $-(a+b)+(a-b)=-2b$, falls $b \leq a$.
- In jedem Fall ändert sich S also um eine gerade Zahl

Zahlen an der Tafel: Beweis

- Wir betrachten die Summe S aller Zahlen, die momentan an der Tafel stehen
- Ersetzen wir die Zahlen a und b durch $|a-b|$, so ändert sich der Wert von S um
  - $-(a+b)+(b-a)=-2a$, falls $a \leq b$,
  - $-(a+b)+(a-b)=-2b$, falls $b \leq a$.
- In jedem Fall ändert sich S also um eine gerade Zahl
- Die Parität von S bleibt also bei jedem Ersetzungsschritt invariant!
- Zu Beginn ist $S=\sum_{i=1}^{2n} i=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$, also eine ungerade Zahl (da n ungerade)
- Also ist S auch nach dem letzten Schritt ungerade, damit muss die übriggebliebene Zahl ungerade sein

Kreissektoren

- Ein Kreis wird in 6 Kreissektoren aufgeteilt, in denen (gegen den Uhrzeigersinn) die Zahlen 1, 1, 0, 1, 0, 1 stehen.
- In jedem Schritt dürfen wir die Zahlen in zwei nebeneinanderliegenden Sektoren um 1 erhöhen.
- Können wir jemals nach endlich vielen Schritten erreichen, dass in jedem Sektor dieselbe Zahl steht?

Kreissektoren

- Ein Kreis wird in 6 Kreissektoren aufgeteilt, in denen (gegen den Uhrzeigersinn) die Zahlen 1, 1, 0, 1, 0, 1 stehen.
- In jedem Schritt dürfen wir die Zahlen in zwei nebeneinanderliegenden Sektoren um 1 erhöhen.
- Können wir jemals nach endlich vielen Schritten erreichen, dass in jedem Sektor dieselbe Zahl steht?
- **Antwort:** Nein!

Kreissektoren

- Ein Kreis wird in 6 Kreissektoren aufgeteilt, in denen (gegen den Uhrzeigersinn) die Zahlen 1, 1, 0, 1, 0, 1 stehen.
- In jedem Schritt dürfen wir die Zahlen in zwei nebeneinanderliegenden Sektoren um 1 erhöhen.
- Können wir jemals nach endlich vielen Schritten erreichen, dass in jedem Sektor dieselbe Zahl steht?
- **Antwort:** Nein!

Beweis:

- Seien a, b, c, d, e, f die Zahlen in den Kreissektoren.
- Dann ist $I = a - b + c - d + e - f$ eine Invariante!
- Zu Beginn ist $I = 1 - 1 + 0 - 1 + 0 - 1 = -2$, also können wir niemals $I = 0$ erreichen.

Chamäleons

- Auf einer Insel leben momentan 13 rote, 15 grüne und 17 blaue Chamäleons.
- Immer wenn sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe treffen, wechseln beide ihre Farbe in die dritte Farbe.
- Kann es passieren, dass zu irgendeinem Zeitpunkt alle Chamäleons dieselbe Farbe haben?

Chamäleons

- Auf einer Insel leben momentan 13 rote, 15 grüne und 17 blaue Chamäleons.
- Immer wenn sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe treffen, wechseln beide ihre Farbe in die dritte Farbe.
- Kann es passieren, dass zu irgendeinem Zeitpunkt alle Chamäleons dieselbe Farbe haben?
- **Antwort:** Nein!

Chamäleons

- Auf einer Insel leben momentan 13 rote, 15 grüne und 17 blaue Chamäleons.
- Immer wenn sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe treffen, wechseln beide ihre Farbe in die dritte Farbe.
- Kann es passieren, dass zu irgendeinem Zeitpunkt alle Chamäleons dieselbe Farbe haben?
- **Antwort:** Nein!

Beweis:

- Seien r, g, b die Anzahlen der roten, grünen bzw. blauen Chamäleons.
- Dann ist z.B. $I = (r - g) \mod 3$ eine Invariante, und da $(13 - 15 \mod 3) \neq 0$ können wir niemals $r = g$ erreichen, analog niemals $g = b$ oder $r = b$.

Minus Eins

- Wir betrachten folgende Tabelle:

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	-1	1

- Wir dürfen innerhalb einer Zeile, einer Spalte, oder einer Diagonalenparallelen alle Vorzeichen umdrehen.
- Können wir erreichen, dass überall nur Einsen stehen?

Das Extremalprinzip

- Allgemein: *Wo etwas extremal wird, entstehen besondere Strukturen.*
- Meist wollen wir die Existenz eines Objektes mit gewissen Eigenschaften zeigen
- Extremalprinzip: *Wähle ein Objekt, welches eine bestimmte Größe maximiert/minimert, und zeige dann, dass dieses die gewünschten Eigenschaften besitzt.*

Das Extremalprinzip

- Allgemein: *Wo etwas extremal wird, entstehen besondere Strukturen.*
- Meist wollen wir die Existenz eines Objektes mit gewissen Eigenschaften zeigen
- Extremalprinzip: *Wähle ein Objekt, welches eine bestimmte Größe maximiert/minimert, und zeige dann, dass dieses die gewünschten Eigenschaften besitzt.*

Zugrundeliegende Tatsachen:

- Jede (nichtleere) Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.
- Jede (nichtleere) endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat ein kleinstes und ein größtes Element.

Menge, die alle Mittelpunkte enthält

- Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene mit $|P| \geq 2$, sodass für alle Punkte $A, B \in P$ auch der Mittelpunkt M_{AB} in P enthalten ist.
- Behauptung: P enthält unendlich viele Punkte.

Menge, die alle Mittelpunkte enthält

- Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene mit $|P| \geq 2$, sodass für alle Punkte $A, B \in P$ auch der Mittelpunkt M_{AB} in P enthalten ist.
- Behauptung: P enthält unendlich viele Punkte.

Beweis:

- Angenommen, P wäre endlich.
- Seien $A, B \in P$ mit $A \neq B$ so gewählt, dass der Abstand $|AB|$ minimal unter allen solchen Paaren ist.
- Nach Voraussetzung liegt auch M_{AB} in P.
- Es gilt aber $|AM_{AB}| = \frac{1}{2}|AB| < |AB|$, Widerspruch zur Minimalität von $|AB|$!

Einbahnstraßen

- In einem Land gibt es nur Einbahnstraßen. Zwischen je zwei Städten besteht genau eine Straßenverbindung.
- Zeige: Es gibt eine Stadt, die von jeder anderen Stadt direkt oder über höchstens eine weitere Stadt erreichbar ist.

Einbahnstraßen: Beweis

- Sei S eine Stadt mit maximaler Anzahl m von eingehenden Straßen (d.h. jede weitere Stadt hat höchstens m eingehende Straßen).
- Sei D die Menge aller Städte, von denen aus S direkt erreichbar ist (also gilt $|D| = m$).
- Sei U die Menge aller Städte, von denen aus S über genau eine weitere Stadt erreichbar ist (d.h. von denen aus eine Stadt aus D erreichbar ist, aber nicht S).

Einbahnstraßen: Beweis

- Sei S eine Stadt mit maximaler Anzahl m von eingehenden Straßen (d.h. jede weitere Stadt hat höchstens m eingehende Straßen).
- Sei D die Menge aller Städte, von denen aus S direkt erreichbar ist (also gilt $|D| = m$).
- Sei U die Menge aller Städte, von denen aus S über genau eine weitere Stadt erreichbar ist (d.h. von denen aus eine Stadt aus D erreichbar ist, aber nicht S).
- Angenommen, es gibt eine Stadt $T \neq S$, die nicht in D oder U enthalten ist, das heißt: es gibt keine direkte Straße von T nach S oder zu einer Stadt aus D.
- Dann gibt es direkte Straßen von S und jeder Stadt aus D nach T. Damit hat T mindestens $|D| + 1 = m + 1$ eingehende Straßen – Widerspruch zur Maximalität von m!

Farmen und Brunnen

- In der Ebene befinden sich n Farmen und n Brunnen, sodass keine drei auf einer Geraden liegen.
- Ist es möglich, jede Farm mit je einem Brunnen durch schnurgerade Straßen zu verbinden, ohne dass sich die Straßen kreuzen?

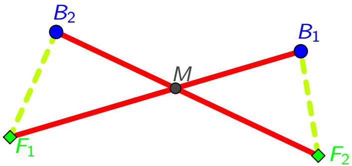
Farmen und Brunnen

- In der Ebene befinden sich n Farmen und n Brunnen, sodass keine drei auf einer Geraden liegen.
- Ist es möglich, jede Farm mit je einem Brunnen durch schnurgerade Straßen zu verbinden, ohne dass sich die Straßen kreuzen?

→ **Ja!**

Farmen und Brunnen: Beweis

- Unter allen (endlich vielen!) bijektiven Zuordnungen zwischen Farmen und Brunnen wählen wir diejenige, die die Gesamtlänge der Straßen minimiert.
- Angenommen, es gäbe dabei zwei Straßen $\overline{F_1 B_1}$, $\overline{F_2 B_2}$, die sich kreuzen.



Farmen und Brunnen: Beweis

- Unter allen (endlich vielen!) bijektiven Zuordnungen zwischen Farmen und Brunnen wählen wir diejenige, die die Gesamtlänge der Straßen minimiert.
- Angenommen, es gäbe dabei zwei Straßen $\overline{F_1B_1}$, $\overline{F_2B_2}$, die sich kreuzen.
- Ersetzen wir diese durch die Straßen $\overline{F_1B_2}$ und $\overline{F_2B_1}$, so wird die Gesamtlänge kürzer, da $|F_1M| + |MB_2| > |F_1B_2|$ und $|F_2M| + |MB_1| > |F_2B_1|$, also $|F_1B_1| + |F_2B_2| > |F_1B_2| + |F_2B_1|$. *Widerspruch zur Minimalität!*