Geraden in Ebenen und Zerlegungen von Graphen

Proseminar | Buch der Beweise

Glenn Dittmann

WiSe 2018/19

Gliederung

Satz von Sylvester-Gallai

Satz

Für jede Anordnung von endlich vielen Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen, gibt es eine Gerade, die genau 2 der Punkte enthält.

Beweis

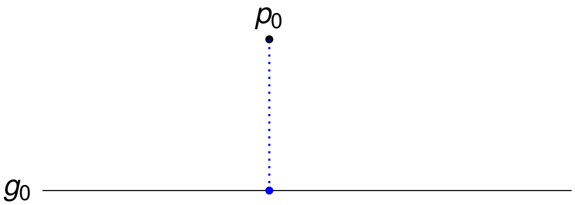
- sei $\mathcal{P}$ eine endliche Menge von Punkten p
- und $\mathcal{G}$ die Menge der Geraden g , die min. 2 Punkte aus $\mathcal{P}$ enthalten
- bilde Paare (p_i, g_i), sodass p nicht auf g liegt
- wählen das Tupel (p_0, g_0), für das p_0 den kleinsten Abstand zur Geraden hat

Behauptung: g_0 ist die gesuchte Gerade

Behauptung: g_0 ist die gesuchte Gerade

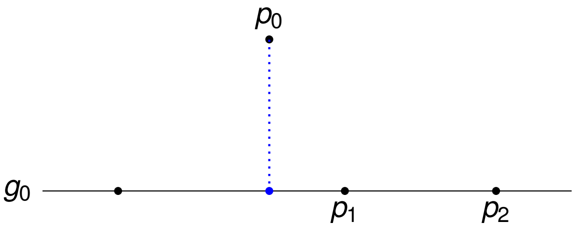
Annahme: g_0 ist es nicht

Behauptung: g_0 ist die gesuchte Gerade



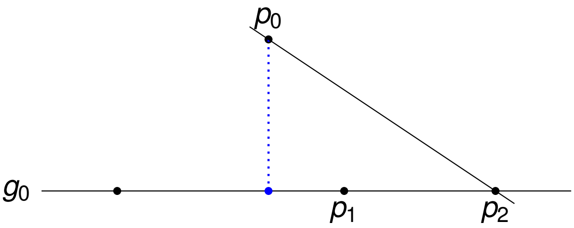
Annahme: g_0 ist es nicht

Behauptung: g_0 ist die gesuchte Gerade



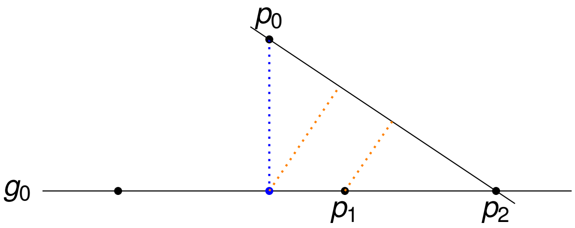
Annahme: g_0 ist es nicht

Behauptung: g_0 ist die gesuchte Gerade



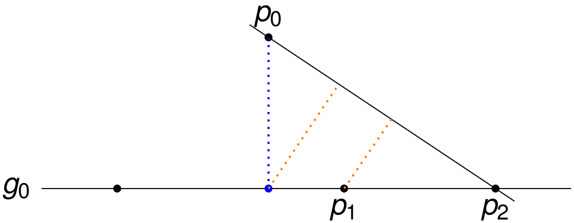
Annahme: g_0 ist es nicht

Behauptung: g_0 ist die gesuchte Gerade



Annahme: g_0 ist es nicht

Behauptung: g_0 ist die gesuchte Gerade



Annahme: g_0 ist es nicht

Widerspruch zur Annahme ↯ □

Satz von Erdős und de Bruijn

Satz

Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Dann besteht die Menge $\mathcal{G}$ der Geraden , die durch mindestens 2 Punkte in $\mathcal{P}$ gehen, aus mindestens n Geraden.

Beweis durch Induktion

IA: für $|\mathcal{P}| = 3$ trivial, s. Tafel

Beweis durch Induktion

IA: für $|\mathcal{P}| = 3$ trivial, s. Tafel

IV: für eine Mengen von Punkten $\mathcal{P}^*$, mit $|\mathcal{P}^*| = n$ gilt $|\mathcal{G}^*| \geq n$

Beweis durch Induktion

IA: für $|\mathcal{P}| = 3$ trivial, s. Tafel

IV: für eine Mengen von Punkten $\mathcal{P}^*$, mit $|\mathcal{P}^*| = n$ gilt $|\mathcal{G}^*| \geq n$

IS:
- sei $|\mathcal{P}| = n + 1$

Beweis durch Induktion

IA: für $|\mathcal{P}| = 3$ trivial, s. Tafel

IV: für eine Mengen von Punkten $\mathcal{P}^*$, mit $|\mathcal{P}^*| = n$ gilt $|\mathcal{G}^*| \geq n$

IS:
- sei $|\mathcal{P}| = n + 1$
- S.v. Sylvester-Gallai: $\exists$ eine Gerade durch genau 2 Punkte P, Q aus $\mathcal{P}$

Beweis durch Induktion

IA: für $|\mathcal{P}| = 3$ trivial, s. Tafel

IV: für eine Mengen von Punkten $\mathcal{P}^*$, mit $|\mathcal{P}^*| = n$ gilt $|\mathcal{G}^*| \geq n$

IS:
- sei $|\mathcal{P}| = n + 1$
- S.v. Sylvester-Gallai: $\exists$ eine Gerade durch genau 2 Punkte P, Q aus $\mathcal{P}$
- betrachte $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q\}$ und $\mathcal{G}'$

Beweis durch Induktion

IA: für $|\mathcal{P}| = 3$ trivial, s. Tafel

IV: für eine Mengen von Punkten $\mathcal{P}^*$, mit $|\mathcal{P}^*| = n$ gilt $|\mathcal{G}^*| \geq n$

IS:
- sei $|\mathcal{P}| = n + 1$
- S.v. Sylvester-Gallai: $\exists$ eine Gerade durch genau 2 Punkte P, Q aus $\mathcal{P}$
- betrachte $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q\}$ und $\mathcal{G}'$

1.Fall Punkte aus $\mathcal{P}'$ nicht alle auf einer Geraden $\underset{\longrightarrow}{IV}$ $|\mathcal{G}'| \geq n \to |\mathcal{G}| \geq n + 1$

Beweis durch Induktion

IA: für $|\mathcal{P}| = 3$ trivial, s. Tafel

IV: für eine Mengen von Punkten $\mathcal{P}^*$, mit $|\mathcal{P}^*| = n$ gilt $|\mathcal{G}^*| \geq n$

IS:
- sei $|\mathcal{P}| = n + 1$
- S.v. Sylvester-Gallai: $\exists$ eine Gerade durch genau 2 Punkte P, Q aus $\mathcal{P}$
- betrachte $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q\}$ und $\mathcal{G}'$

1.Fall Punkte aus $\mathcal{P}'$ nicht alle auf einer Geraden $\underrightarrow{IV}$ $|\mathcal{G}'| \geq n \rightarrow |\mathcal{G}| \geq n + 1$

2.Fall Punkte aus $\mathcal{P}'$ alle auf einer Geraden $\rightarrow \mathcal{P}$ ist Geradenbüschel mit $n + 1$ Geraden $\square$

Satz von Motzkin oder Conway

Satz

Sei X eine endliche Menge von $n \geq 3$ Elementen, und seien $A_1, \ldots, A_m$ echte Teilmengen von X, so dass jedes Paar von Elementen aus X in genau einer der Mengen A_i enthalten ist. Dann gilt $m \geq n$.

Satz von Motzkin oder Conway

- für $x \in X$ sei r_x die Anzahl an Mengen A_i in denen x vorkommt
- aus den Annahmen folgt: $2 \leq r_x < m$

Satz von Motzkin oder Conway

- für $x \in X$ sei r_x die Anzahl an Mengen A_i in denen x vorkommt
- aus den Annahmen folgt: $2 \leq r_x < m$
- $x \notin A_i \rightarrow r_x \geq |A_i|$

z.z. $m \geq n$

- Annahme: $m < n$

z.z. $m \geq n$

- Annahme: $m < n$
- für $x \notin A_i$

  $\rightarrow \; m|A_i| < nr_x$

  $\rightarrow \; m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$

z.z. $m \geq n$

- Annahme: $m < n$
- für $x \notin A_i$
  - $\rightarrow$ $m|A_i| < nr_x$
  - $\rightarrow$ $m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$
- $$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n}$$

z.z. $m \geq n$

- Annahme: $m < n$
- für $x \notin A_i$
  - $\rightarrow \; m|A_i| < nr_x$
  - $\rightarrow \; m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$
- $$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)}$$

z.z. $m \geq n$

- Annahme: $m < n$
- für $x \notin A_i$
  - $\rightarrow\ m|A_i| < nr_x$
  - $\rightarrow\ m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$
- $$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} \qquad = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1$$

z.z. $m \geq n$

- Annahme: $m < n$
- für $x \notin A_i$
  - $\rightarrow \; m|A_i| < nr_x$
  - $\rightarrow \; m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$
- $$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} \quad \sum_{A_i} \sum_{x : x \notin A_i} \frac{1}{m(n - |A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1$$

z.z. $m \geq n$

- Annahme: $m < n$
- für $x \notin A_i$
  - $\rightarrow m|A_i| < nr_x$
  - $\rightarrow m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$
- $$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x : x \notin A_i} \frac{1}{m(n - |A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1$$

z.z. $m \geq n$

- Annahme: $m < n$
- für $x \notin A_i$
  - $\rightarrow\ m|A_i| < nr_x$
  - $\rightarrow\ m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$
- $$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x : x \notin A_i} \frac{1}{m(n - |A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1$$
- $\lightning \square$

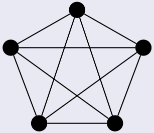
Satz von Graham und Pollak

Satz

Wenn man den Graphen K_n in vollständige bipartite Untergraphen $H_1, \ldots, H_m$ zerlegt, so dass jede Kante aus K_n in genau einem der Graphen H_i liegt. Dann ist $m \geq n - 1$.

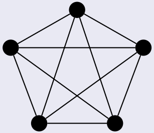
Beispiel

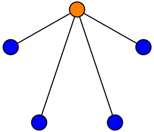
K_5



Beispiel

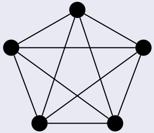
K_5

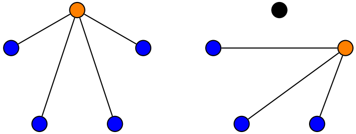




Beispiel

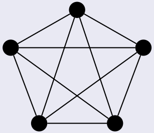
K_5

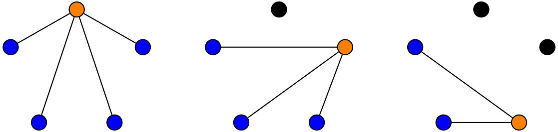




Beispiel

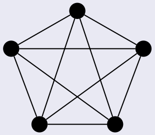
K_5

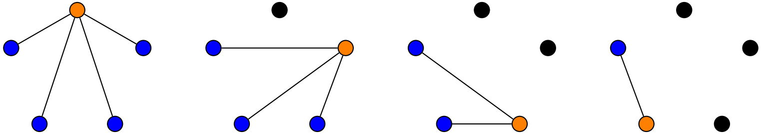




Beispiel

K_5





z.z. $m \geq n - 1$

- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet

z.z. $m \geq n - 1$

- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet
- und seien L_j, R_j die definierenden Knotenmengen der H_j, $j = 1, ..., m$

z.z. $m \geq n - 1$

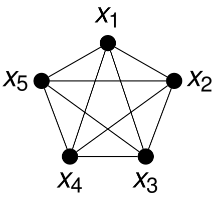
- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet
- und seien L_j, R_j die definierenden Knotenmengen der H_j, $j = 1, ..., m$
- außerdem ordnen wir jedem Knoten i die Variable x_i zu

z.z. $m \geq n - 1$

- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet
- und seien L_j, R_j die definierenden Knotenmengen der H_j, $j = 1, ..., m$
- außerdem ordnen wir jedem Knoten i die Variable x_i zu
- $$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{f=1}^{m} \Big(\sum_{a \in L_f} x_a \cdot \sum_{b \in R_f} x_b\Big) (\star)$$

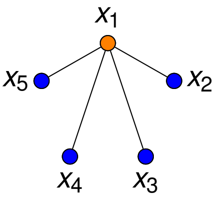
z.z. $m \geq n - 1$

- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet
- und seien L_j, R_j die definierenden Knotenmengen der H_j, $j = 1, ..., m$
- außerdem ordnen wir jedem Knoten i die Variable x_i zu
- $$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{f=1}^{m} \Big(\sum_{a \in L_f} x_a \cdot \sum_{b \in R_f} x_b\Big)(\star)$$



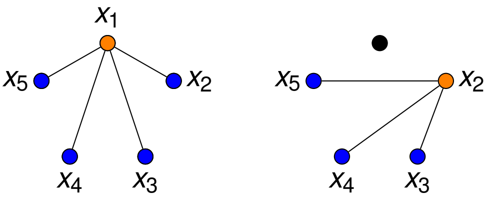
z.z. $m \geq n - 1$

- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet
- und seien L_j, R_j die definierenden Knotenmengen der H_j, $j = 1, ..., m$
- außerdem ordnen wir jedem Knoten i die Variable x_i zu
- $$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{f=1}^{m} (\sum_{a \in L_f} x_a \cdot \sum_{b \in R_f} x_b)(\star)$$



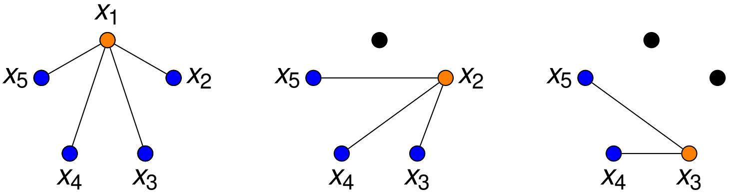
z.z. $m \geq n - 1$

- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet
- und seien L_j, R_j die definierenden Knotenmengen der H_j, $j = 1, ..., m$
- außerdem ordnen wir jedem Knoten i die Variable x_i zu
- $$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{f=1}^{m} \Big(\sum_{a \in L_f} x_a \cdot \sum_{b \in R_f} x_b \Big) (\star)$$



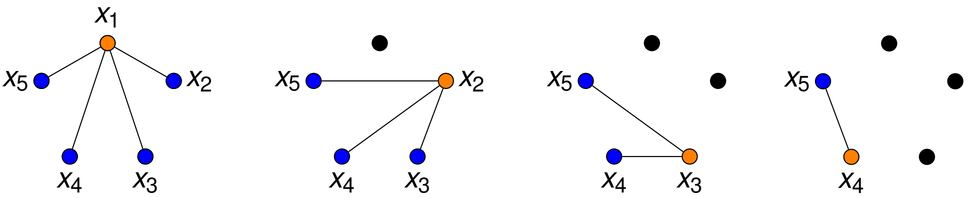
z.z. $m \geq n - 1$

- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet
- und seien L_j, R_j die definierenden Knotenmengen der H_j, $j = 1, ..., m$
- außerdem ordnen wir jedem Knoten i die Variable x_i zu
- $$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{f=1}^{m} \Big(\sum_{a \in L_f} x_a \cdot \sum_{b \in R_f} x_b\Big)(\star)$$



z.z. $m \geq n - 1$

- sei die Knotenmenge von K_n mit $\{1, ..., n\}$ bezeichnet
- und seien L_j, R_j die definierenden Knotenmengen der H_j, $j = 1, ..., m$
- außerdem ordnen wir jedem Knoten i die Variable x_i zu
- $$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{f=1}^{m} \Big(\sum_{a \in L_f} x_a \cdot \sum_{b \in R_f} x_b\Big) (\star)$$



Annahme: $m < n - 1$

betrachten wir nun das folgende LGS

-
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0 && (1)\\
\sum_{a \in L_1} x_a &= 0 && (2)\\
\sum_{a \in L_2} x_a &= 0 && (3)\\
&\ldots.\\
\sum_{a \in L_m} x_a &= 0 && (m+1)
\end{aligned}
$$

Annahme: $m < n - 1$

betrachten wir nun das folgende LGS

- $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ... + x_n &= 0 && (1) \\ \sum_{a \in L_1} x_a &= 0 && (2) \\ \sum_{a \in L_2} x_a &= 0 && (3) \\ &.... \\ \sum_{a \in L_m} x_a &= 0 && (m+1) \end{aligned}$$

- $\rightarrow \exists$ eine nicht-triviale Lösung $c_1, ..., c_n$

Annahme: $m < n - 1$

- durch Einsetzen von (2) bis (m+1) in ($\star$) folgt

$$\sum_{i<j} c_i c_j = 0$$

Annahme: $m < n - 1$

- durch Einsetzen von (2) bis (m+1) in ($\star$) folgt

$$\sum_{i<j} c_i c_j = 0$$

-

$$0 = (c_1 + ... + c_n)^2$$

Annahme: $m < n - 1$

- durch Einsetzen von (2) bis (m+1) in ($\star$) folgt

$$\sum_{i<j} c_i c_j = 0$$

- $$0 = (c_1 + \ldots + c_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_i c_j =$$

Annahme: $m < n - 1$

- durch Einsetzen von (2) bis (m+1) in ($\star$) folgt

$$\sum_{i<j} c_i c_j = 0$$

- $$0 = (c_1 + \dots + c_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_i c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

Annahme: $m < n - 1$

- durch Einsetzen von (2) bis (m+1) in ($\star$) folgt

$$\sum_{i<j} c_i c_j = 0$$

- $$0 = (c_1 + \ldots + c_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2\sum_{i<j} c_i c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$$

Annahme: $m < n - 1$

- durch Einsetzen von (2) bis (m+1) in ($\star$) folgt

$$\sum_{i<j} c_i c_j = 0$$

- $$0 = (c_1 + \ldots + c_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2\sum_{i<j} c_i c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$$

- $\lightning\,\square$