Der Fünf-Farben-Satz

2018-11-15

Kapitel 35 · Buch der Beweise

Agenda

- Einführung
- Anwendungen
- Beispiel

- 2/3-Farben problem
- Eulersche Polyederformel
- 6 Farbensatz
- 5 Farben satz
- Rekapitulation

Problemstellung

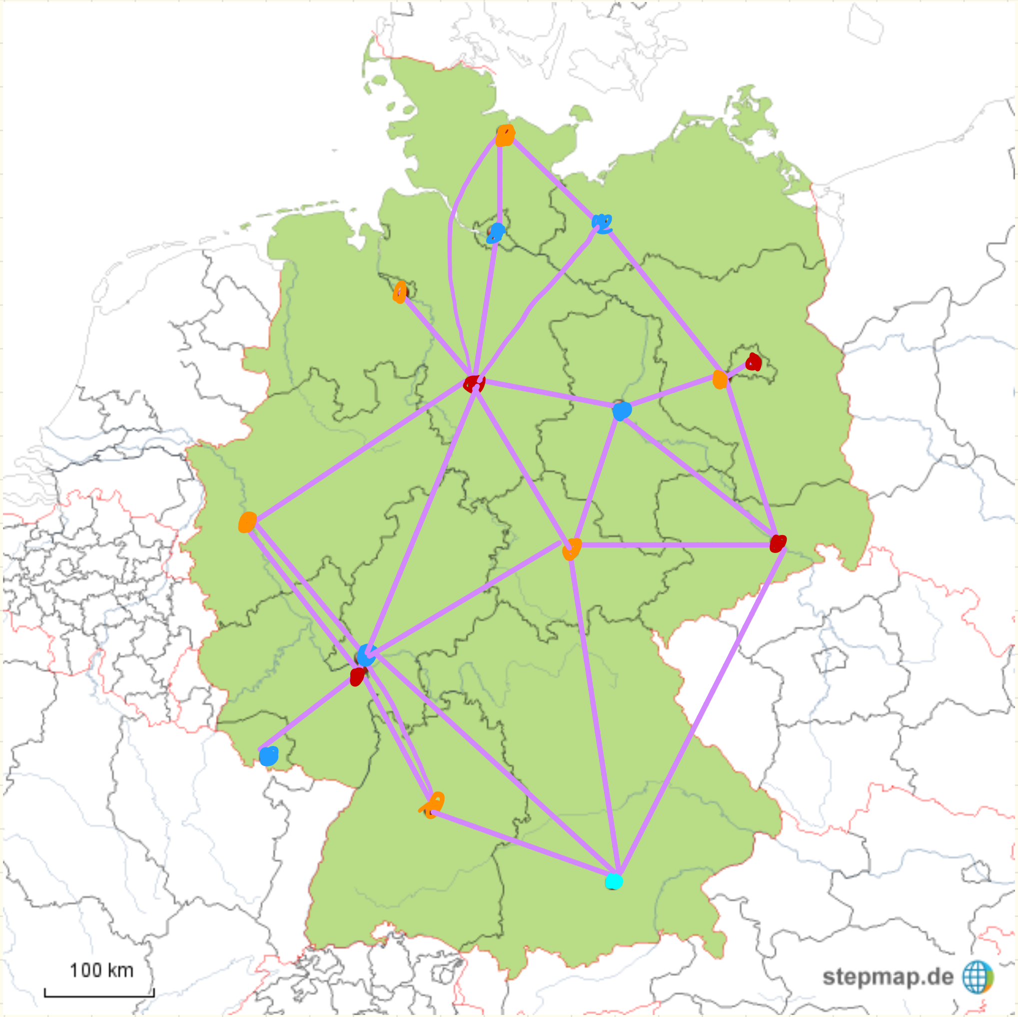
Färbe eine (planare) Landkarte mit x Farben, sodass gilt, dass Nachbarflächen nicht gleichfarbig sind.

Geschichte

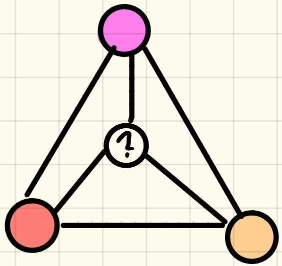
- Alfred Kempe 4 Farbensatz (falsch), 1879
- Percy Heawood Widerlegung & Beweis 5 Farbensatz, 1890
- Unmengen weitere (falsche) Beweise und (falsche) Gegenbeweise
- 1976 Appel & Haken
- 1997 Robertson, Sanders, Seymour & Thomas

Anwendungen von Färbungsproblemen

- Landkarten färben
- Museumswächterproblem
- (Stundenpläne)



2 und 3 Färbung
nicht immer möglich

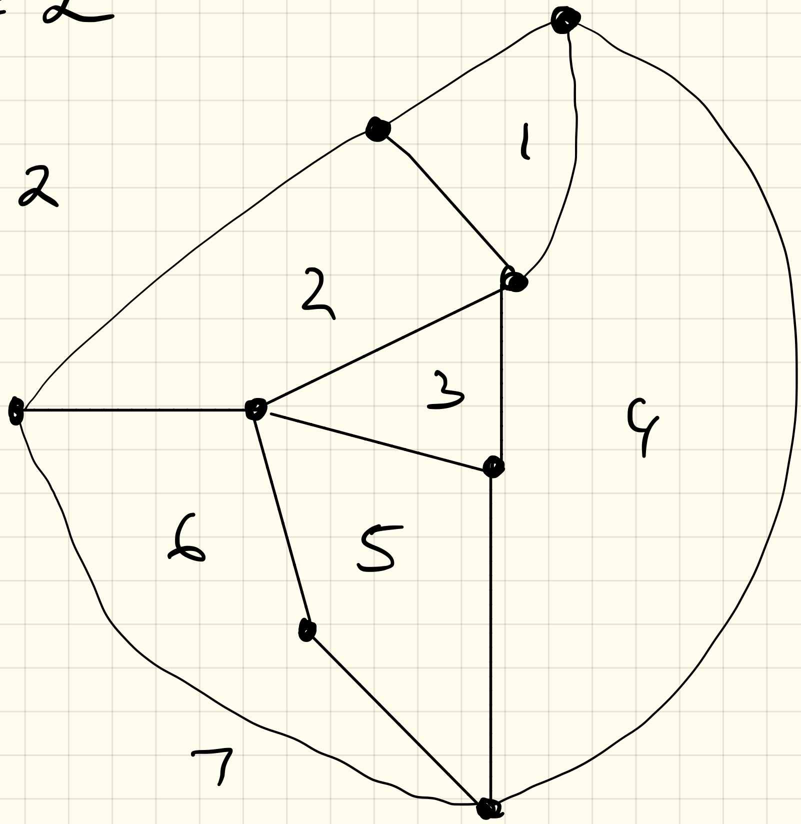


Eulersche Formel

$$\overset{n}{|V|} - \overset{e}{|\underline{\underline{E}}|} + \overset{f}{|R|} = 2$$

Knoten Kanten Gebiet

Bsp.: $8 - 13 + 7 = 2$



Bew. IA: •

$1 - 0 + 1 = 2$

Schritt:

Knoten hinzufügen

$+1 \quad -1$

Kante hinzufügen

$-1 \quad +1$

(1) $n = \cancel{n_0} + n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_\lambda$ $\quad n_i :=$ Knoten i-ten Grads;

(2) $2e = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots + \lambda \cdot n_\lambda$ $\quad f_i =$ Gebiete mit i Kanten Begrenzung

(3) $f = f_3 + f_4 + f_5 + \ldots + f_\lambda$
$(f_0 + f_1 + f_2 +)$

(4) $2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \ldots + \lambda f_\lambda$

Durchschnittsgrad e. Knotens $\quad d = \frac{2e}{n}$

Durchschnittliche Kantenzahl p. Gebiet $\quad d_{Kant} = \frac{2e}{f}$

$$\overset{n}{|V|} - \overset{e}{|E|} + \overset{f}{|R|} = 2$$

Knoten $\quad$ Kanten $\quad$ Gebiete

Schlussfolgerungen

(A) Graph G hat maximal $3n-6$ Kanten

(B) es existiert mindestens ein Knoten mit Grad ≤ 5

(3) $f = 0f_1 + 0f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \dots$

(4) $2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 \dots$

Bew A: $2e - 3f \geq 0$, $n + f - e = 2$

$$\Leftrightarrow 3n + 3f - 3e = 6$$
$$\Leftrightarrow 3n - 6 = 3e - 3f$$
$$\Leftrightarrow 3n - 6 = e + \underbrace{2e - 3f}_{\geq 0}$$

$$3n - 6 \geq e$$

BewB: $\sum_{n=1}^{|V|} \deg(v_i) = 2|E|$

$3n - 6 \geq e$

$6n - 12 \geq 2e$

$\frac{6n-12}{n} \geq \frac{2e}{n} = d$

$\frac{6n}{n} - \frac{12}{n} \geq \frac{2e}{n}$

$6 - \frac{12}{n} \geq \frac{2e}{n}$

Beweis 6 Färbbarkeit

IA:

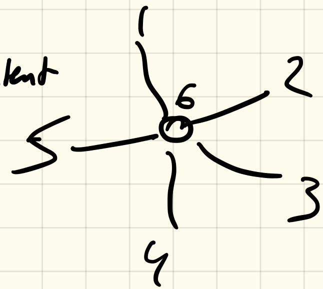
 → eindeutig 6 Färbbar

Annahme: alle Graphen mit n-1 Knoten sind 5 Färbbar ist

Schritt: Graph G hat einen Knoten v mit $\deg \leq 5$
mit n Knoten

Entferne Knoten v, $G' = G \setminus v$

nach Annahme 6 Färbbar, da höchstens 5 Nachbaren existent
jede Färbung von G' ist zu 6 Färbung von G erweiterbar



Beweis 5 Färbbarkeit

IA:  → eindeutig 5 Färbbar

Annahme: alle Graphen mit $n-1$ Knoten sind 5 Färbbar ist

I Schritt: Fall 1: Wenn ein Knoten mit $\deg < 5$ existiert:

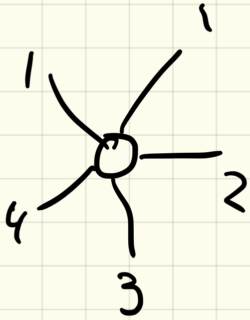
$G' = G \setminus v$, v hat maximal 4 Nachbarn.

Fall 2: wenn kein Knoten mit $\deg < 5$ existiert

2.1: Die 5 Nachbarknoten benutzen weniger als 5 Farben.

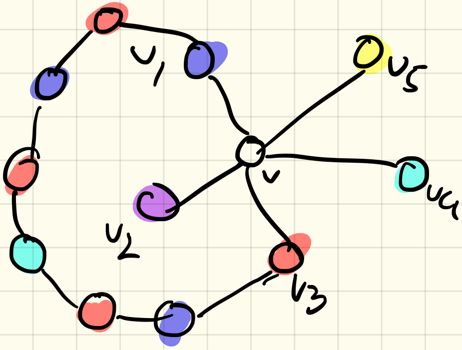
$G' = G \setminus v$, v hat 5 Nachbaren mit 4 Farben,

2.2. Die 5 Nachbarknoten benutzen genau 5 Farben.



Fall 2.2.1

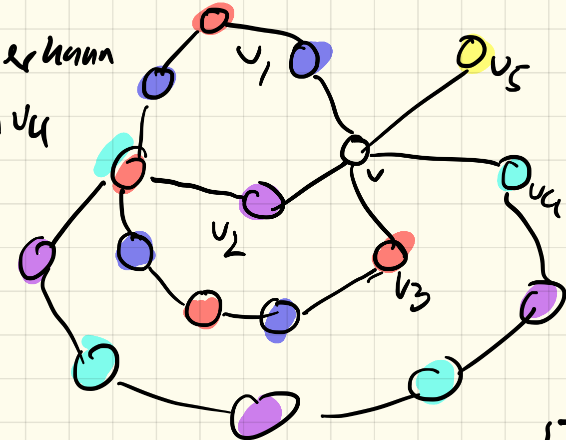
existiert Weg von v_1 nach v_2, der nicht über v führt und nur beide Farben von v_1 und v_3 nutzt?
wenn nicht, dann Färbe v_1 auf Farbe von v_3, dessen Nachbarn mit v_3-Farbe auf v_1, usw.
v_1 und v_3 haben nun gleiche Farbe, v ist färbbar mit fünfter Farbe.



Fall 2.2.2

ein solcher Weg von v_1 nach v_3 existiert. Aber er kann in planaren Graphen nicht auch von v_2 nach v_4 existieren. Beide Wege kreuzen sich.

Wende 2.2.1 auf v_2 und v_4 an.



□

Quellen

- Das Buch d. Beweise, Martin Aigner, Günter M. Ziegler, 2014
  S. 263 ff
- https://de.wikipedia.org/wiki/Eulerscher_Polyedersatz

  abgerufen: 2018-11-15T 11:14:01
- https://www.stepmap.de/landkarte/stumme-karte-deutschland-2PiXCKybs1-i

  abgerufen: 2018-11-15T 11:26:37