Eulersche Polyederformel

Drei Beweise

Inhalt

1. Einführung

Inhalt

Inhalt

1. Einführung
2. Beweis durch strukturelle Induktion
3. Beweis mit Satz von Pick

Inhalt

Inhalt

1. Einführung
2. Beweis durch strukturelle Induktion
3. Beweis mit Satz von Pick
4. Beweis nach von Staudt
5. Weitere Folgerungen aus der eulerschen Polyederformel

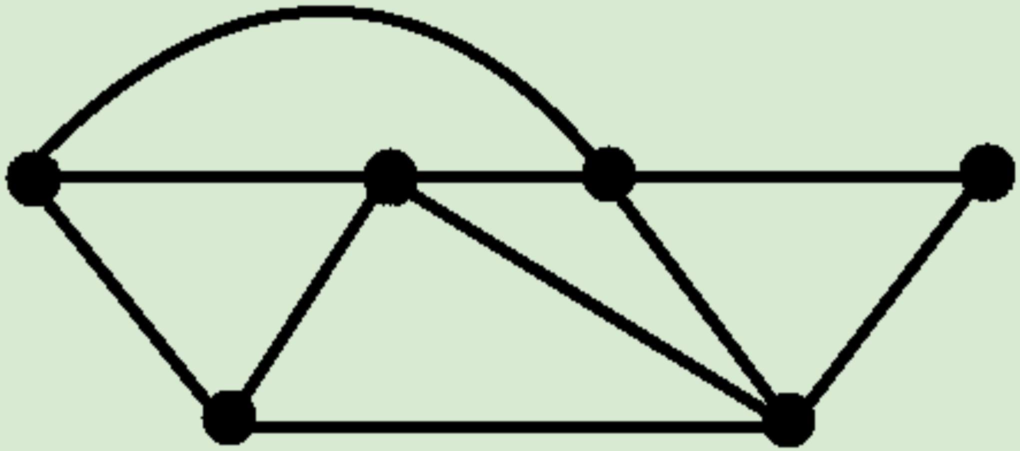
Die eulersche Polyederformel

Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen G mit n Ecken, e Kanten und f Gebieten gilt:

$$n - e + f = 2$$

Die eulersche Polyederformel

Bsp.:



n = 6

e = 10

f = 6

6 - 10 + 6 = 2 ✔

Bilden eines planaren, zusammenhängenden Graphen

Zwei mögliche Operationen:

1. Hinzufügen einer Ecke über eine neue Kante
2. Hinzufügen einer Kante zwischen zwei bestehenden Knoten

Bilden eines planaren, zusammenhängenden Graphen

Der einfachste Graph:

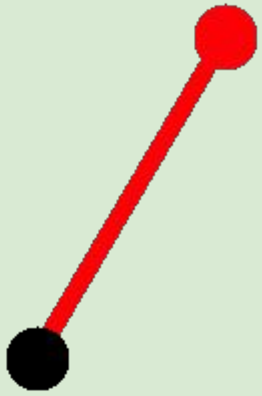
$n = 1$, $e = 0$, $f = 1$

$1 - 0 + 1 = 2$ ✔

Bilden eines planaren, zusammenhängenden Graphen

Hinzufügen einer Ecke über eine neue Kante:

$n = 1+1$, $e = 0+1$, $f = 1$



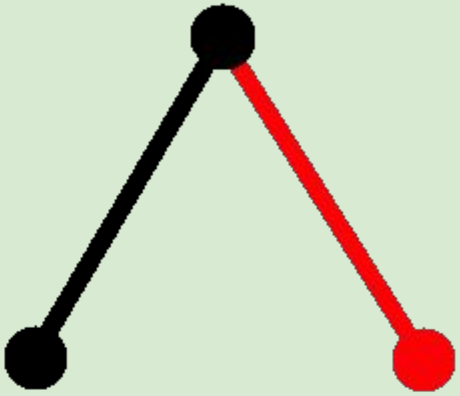
$2 - 1 + 1 = 2$ ✔

Bilden eines planaren, zusammenhängenden Graphen

Hinzufügen einer Ecke über eine neue Kante:

$n = 2+1$, $e = 1+1$, $f = 1$

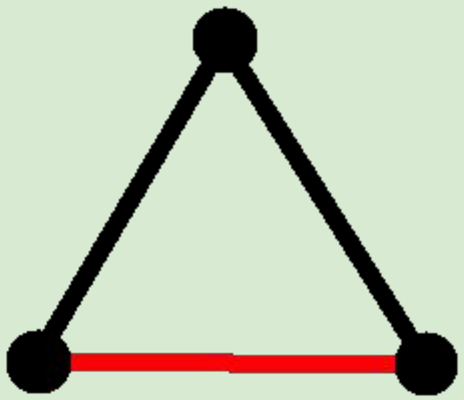
$3 - 2 + 1 = 2$ ✔



Bilden eines planaren, zusammenhängenden Graphen

Hinzufügen einer Kante zwischen zwei bestehenden Knoten:

$n = 3$, $e = 2{+}1$, $f = 1{+}1$



$3 - 3 + 2 = 2$ ✔

Beweis durch strukturelle Induktion

IV: $n - e + f = 2$

Beweis durch strukturelle Induktion

IV: $n - e + f = 2$

IA: $n = 1, e = 0, f = 1$ $1 - 0 + 1 = 2$ ✔

Beweis durch strukturelle Induktion

IV: $n - e + f = 2$

IA: $n = 1, e = 0, f = 1$ $\quad 1 - 0 + 1 = 2$ ✔

IB: $n' - e' + f' = 2$

Beweis durch strukturelle Induktion

IV: $n - e + f = 2$

IA: $n = 1, e = 0, f = 1$ $1 - 0 + 1 = 2$ ✔

IB: $n' - e' + f' = 2$

IS: Fall 1: Hinzufügen einer Ecke über eine neue Kante

Fall 2: Hinzufügen einer Kante zwischen zwei bestehenden Knoten

Beweis durch strukturelle Induktion

IS: Fall 1: Hinzufügen einer Ecke über eine neue Kante:

$$n' - e' + f' = (n + 1) - (e + 1) + f = n - e + f = 2$$

Beweis durch strukturelle Induktion

IS: Fall 1: Hinzufügen einer Ecke über eine neue Kante:

$$n' - e' + f' = (n + 1) - (e + 1) + f = n - e + f = 2$$

Fall 2: Hinzufügen einer Kante zwischen zwei bestehenden Knoten:

$$n' - e' + f' = n - (e + 1) + (f + 1) = n - e + f = 2$$

■

Beweis mit Satz von Pick

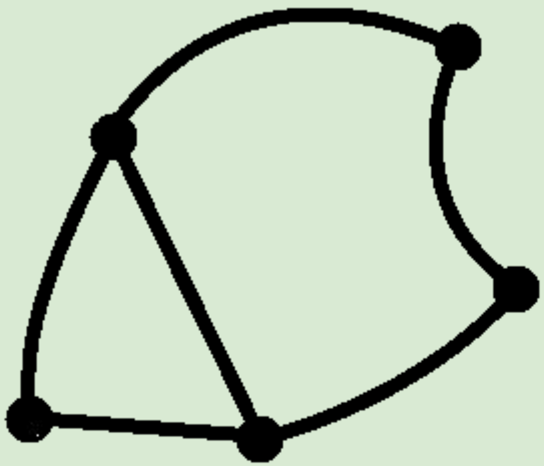
Die Fläche eines Polygons Q $\subseteq \mathbb{R}^2$ *mit ganzzahligen Ecken ist durch*

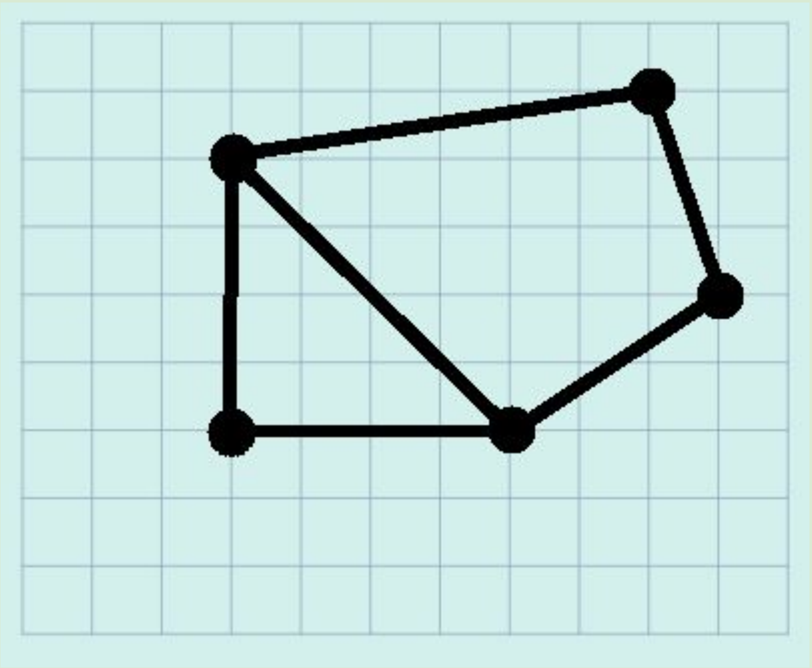
$$A(Q) = n_{in} + \frac{1}{2} n_{rd} - 1$$

gegeben. Wobei n_{in} *und* n_{rd} *die Anzahlen der ganzahligen Punkte im Inneren bzw. auf dem Rand von Q sind.*

Beweis mit Satz von Pick

- Für den Beweis notwendig ist eine Einbettung des Graphen in ein Gitternetz

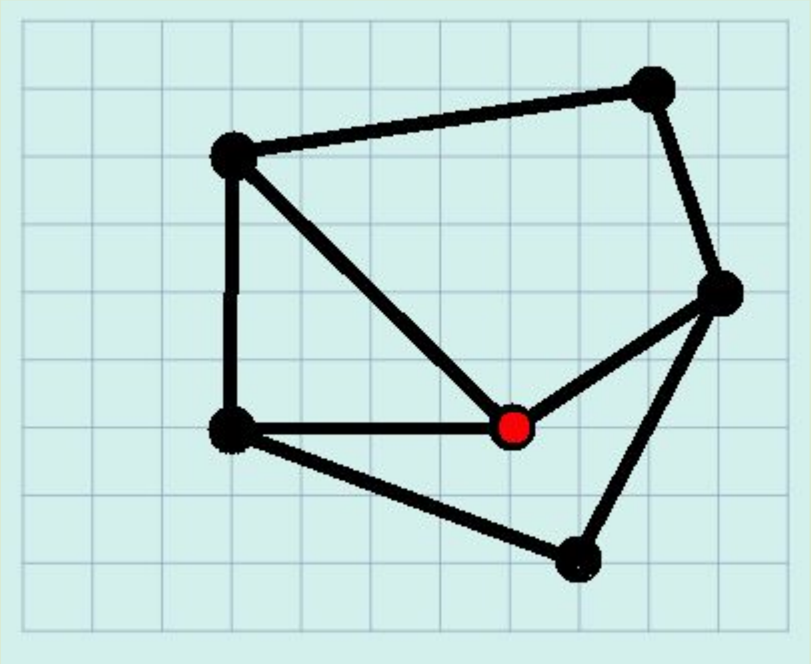




Beweis mit Satz von Pick

Charakterisierung der Gitterpunkte auf und innerhalb des Graphen:

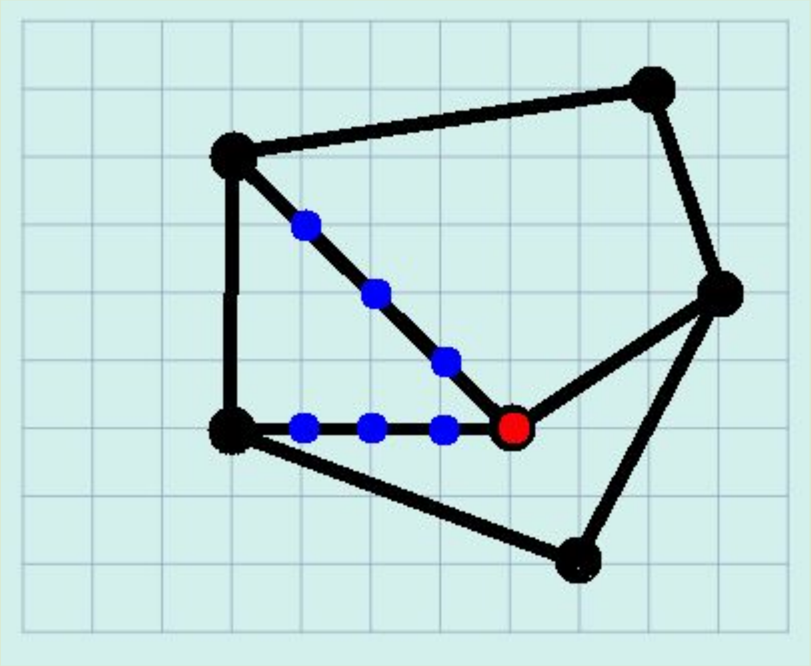
- v innere Knotenpunkte



Beweis mit Satz von Pick

Charakterisierung der Gitterpunkte auf und innerhalb des Graphen:

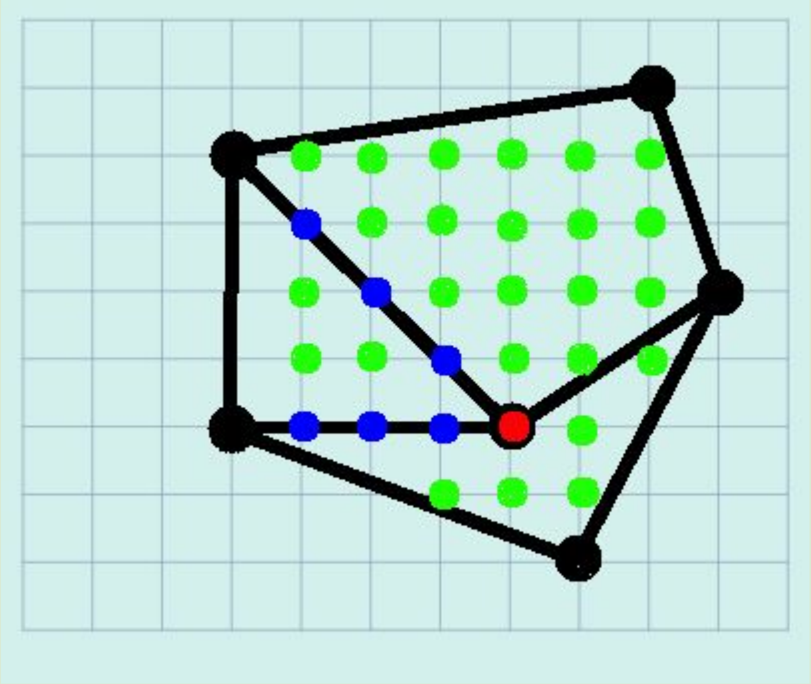
- v innere Knotenpunkte
- y inneren Kantenpunkte



Beweis mit Satz von Pick

Charakterisierung der Gitterpunkte auf und innerhalb des Graphen:

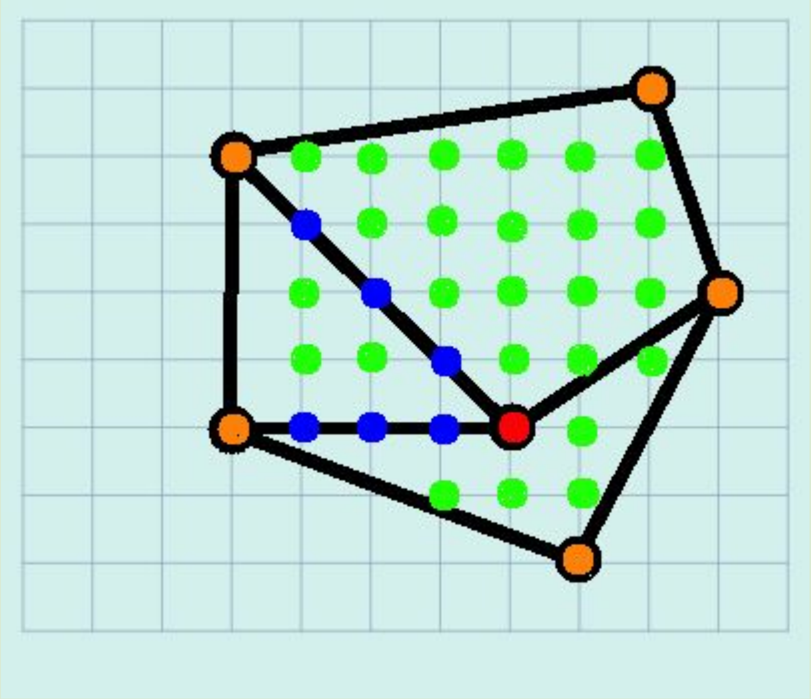
- v innere Knotenpunkte
- y inneren Kantenpunkte
- z sonstige innere Punkte



Beweis mit Satz von Pick

Charakterisierung der Gitterpunkte auf und innerhalb des Graphen:

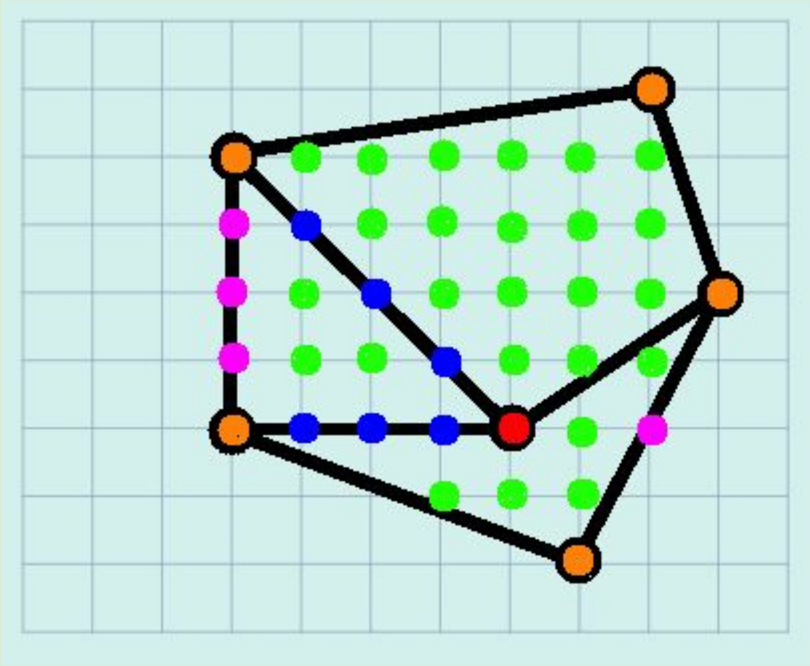
- v innere Knotenpunkte
- y inneren Kantenpunkte
- z sonstige innere Punkte
- u äußere Knotenpunkte



Beweis mit Satz von Pick

Charakterisierung der Gitterpunkte auf und innerhalb des Graphen:

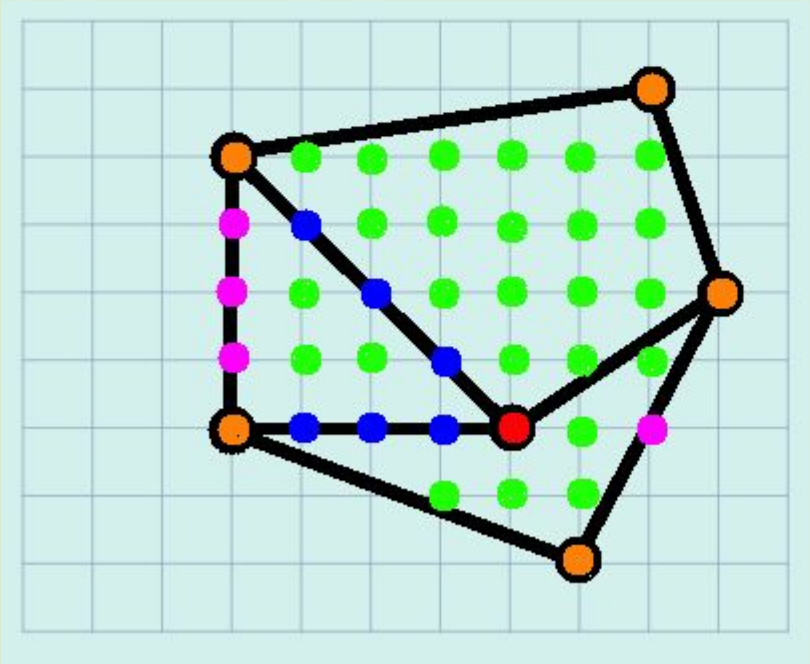
- v innere Knotenpunkte
- y inneren Kantenpunkte
- z sonstige innere Punkte
- u äußere Knotenpunkte
- x äußere Kantenpunkte



Beweis mit Satz von Pick

Charakterisierung der Gitterpunkte auf und innerhalb des Graphen:

- v innere Knotenpunkte
- y inneren Kantenpunkte
- z sonstige innere Punkte
- u äußere Knotenpunkte
- x äußere Kantenpunkte

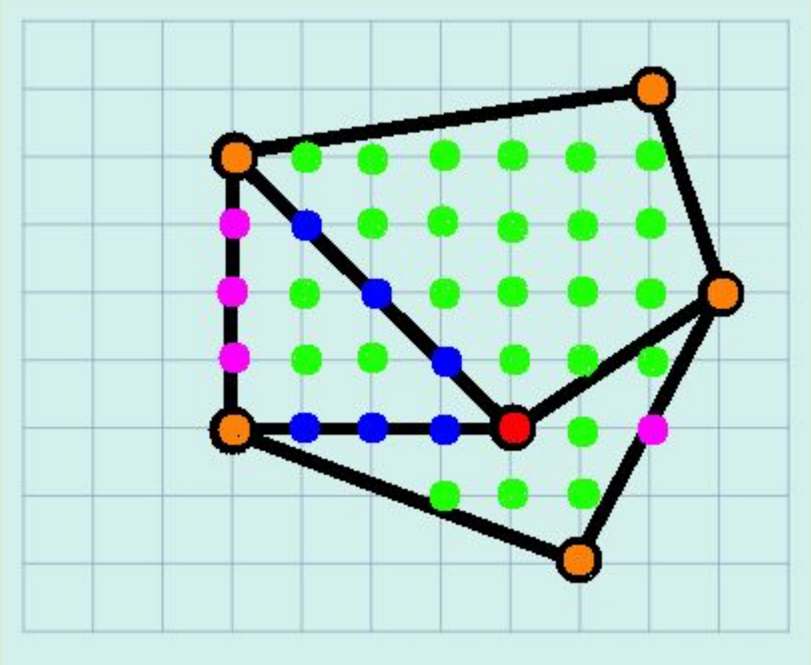


Offensichtlich gilt: (1) $n = u + v$

Beweis mit Satz von Pick

Für den äußeren Graphen gilt:

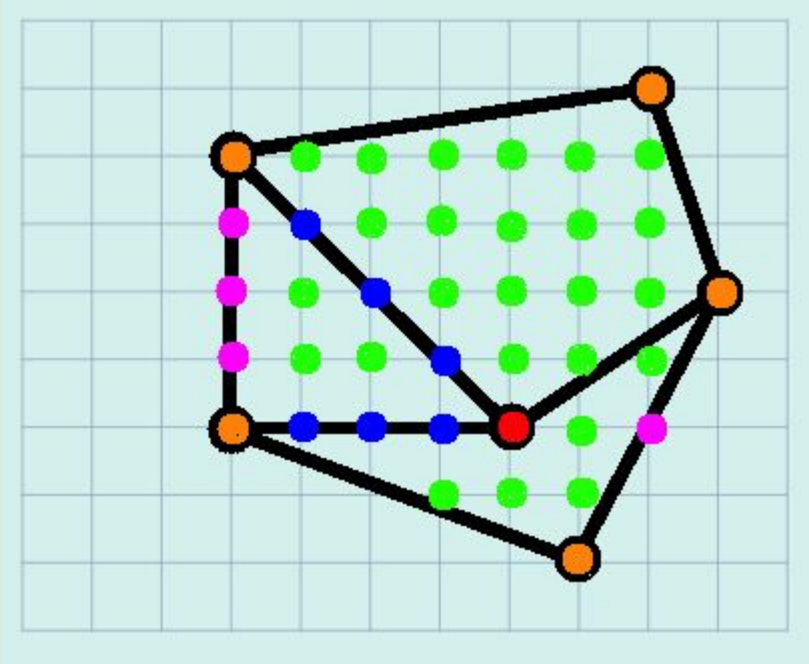
(2) $A = (v + y + z) + \frac{1}{2}(u + x) - 1$



Beweis mit Satz von Pick

Für den gesamten Graphen gilt nach (f -1)-maliger Anwendung des Satz von Pick:

(3) $A = z + \frac{1}{2}(2y + x + 2e - u) - (f - 1)$



Beweis mit Satz von Pick

Mit (1), (2) und (3) ergibt sich:

$$(v+y+z) + \frac{1}{2}(u+x) - 1 = z + \frac{1}{2}(2y+x+2e-u) - (f-1)$$

Beweis mit Satz von Pick

Mit (1), (2) und (3) ergibt sich:

$$(v+y+z) + \frac{1}{2}(u+x) - 1 = z + \frac{1}{2}(2y+x+2e-u) - (f-1)$$

$$v + y + z + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}x - 1 = z + y + \frac{1}{2}x + e - \frac{1}{2}u - f + 1$$

Beweis mit Satz von Pick

Mit (1), (2) und (3) ergibt sich:

$$(v+y+z) + \tfrac{1}{2}(u+x) - 1 = z + \tfrac{1}{2}(2y+x+2e-u) - (f-1)$$

$$v + y + z + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}x - 1 = z + y + \tfrac{1}{2}x + e - \tfrac{1}{2}u - f + 1$$

$$v + u - e + f = 2$$

Beweis mit Satz von Pick

Mit (1), (2) und (3) ergibt sich:

$$(v+y+z) + \tfrac{1}{2}\,(u+x) - 1 = z + \tfrac{1}{2}\,(2y+x+2e-u) - (f-1)$$

$$v + y + z + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}x - 1 = z + y + \tfrac{1}{2}x + e - \tfrac{1}{2}u - f + 1$$

$$v + u - e + f = 2$$

$$n - e + f = 2$$

■

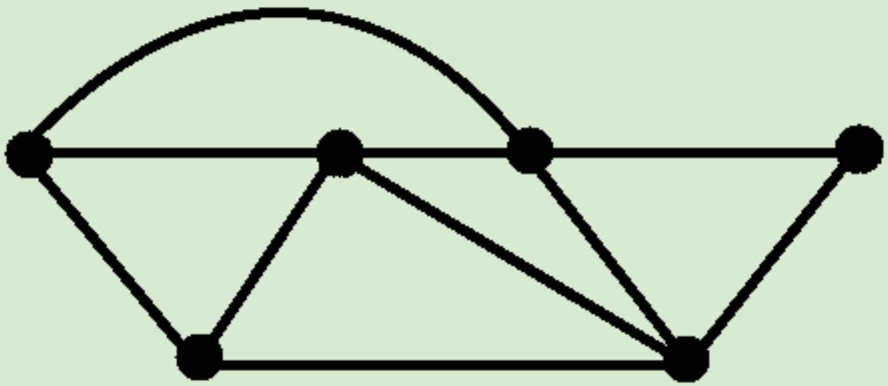
Beweis nach von Staudt

Vorgehen:

1. Bilden des zu G dualen Graphen G*
2. Bilden eines Spannbaums T von G
3. Bilden des Spannbaums T* von G*
4. Schlussfolgerung

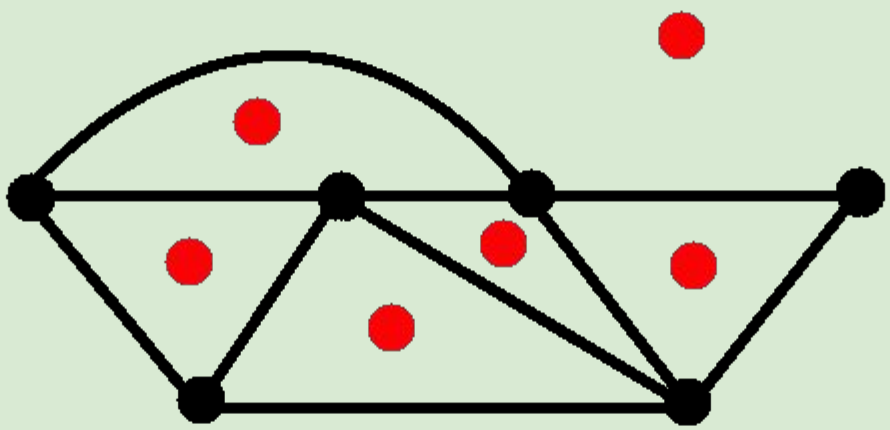
Bilden des zu G dualen Graphen G*

- Jeder Fläche von G wird eine neue Ecke e' hinzugefügt



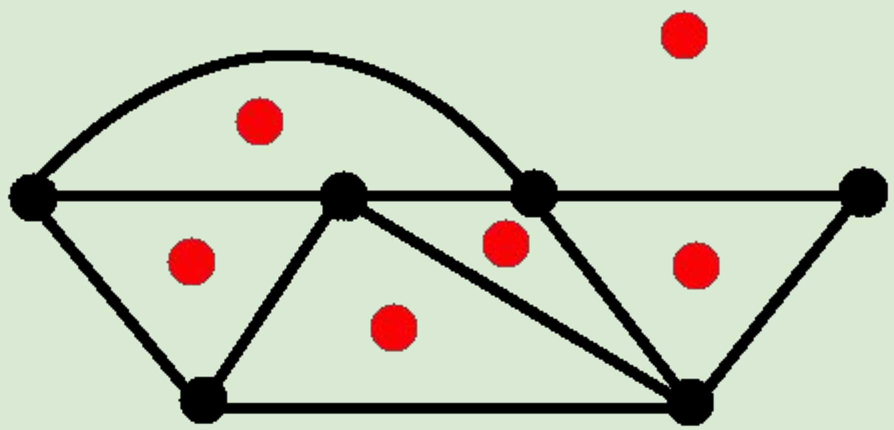
Bilden des zu G dualen Graphen G*

- Jeder Fläche von G wird eine neue Ecke e’ hinzugefügt



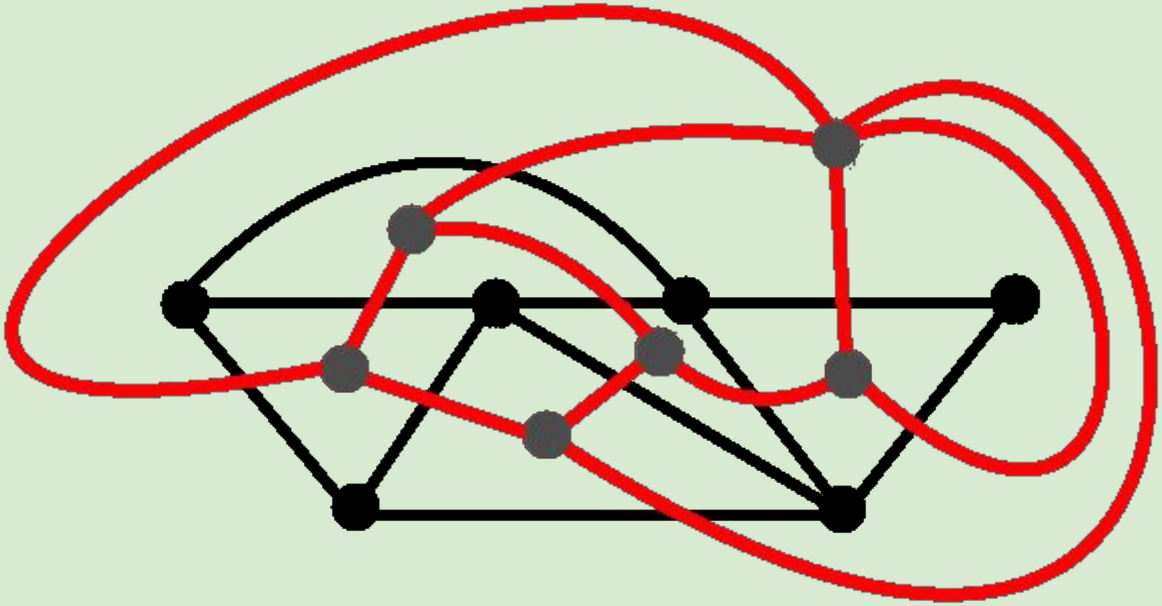
Bilden des zu G dualen Graphen G*

- Zu jeder Kante k wird eine neue Kante k’ erstellt, die die Ecken e’ verbindet

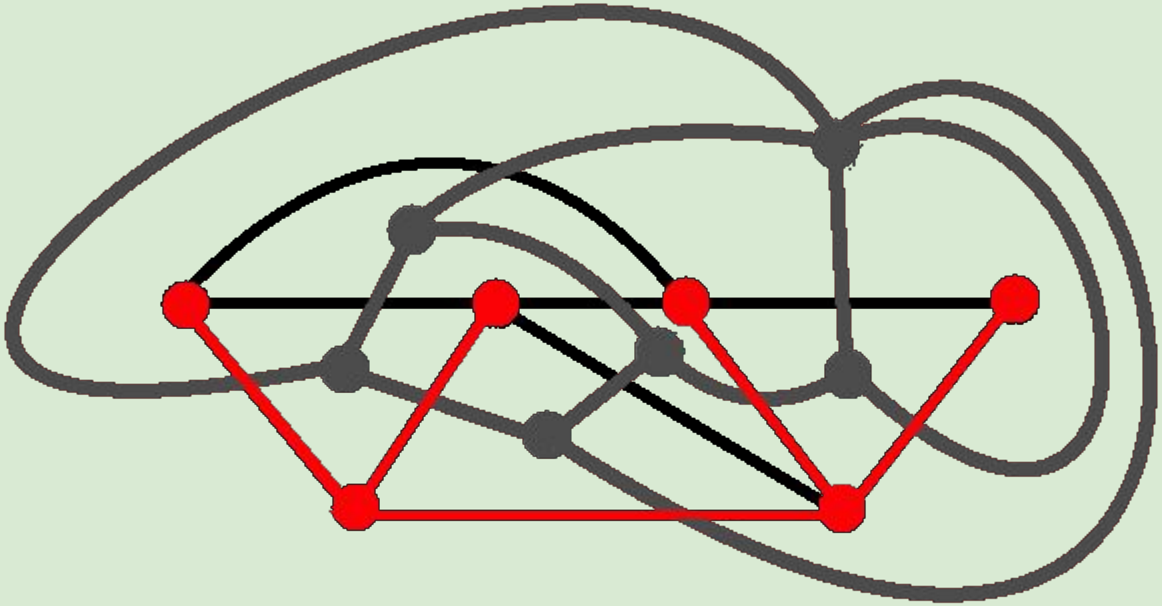


Bilden des zu G dualen Graphen G*

- Zu jeder Kante k wird eine neue Kante k’ erstellt, die die Ecken e’ verbindet

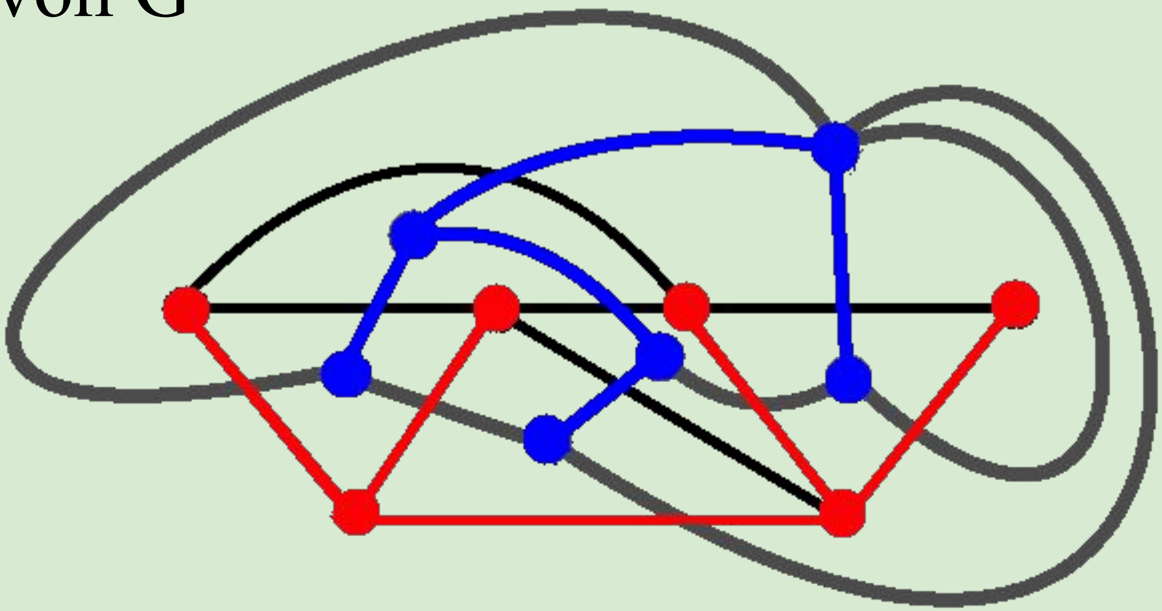


Bilden eines Spannbaums T von G



Bilden des Spannbaums T* von G*

- Die Kanten von T und T* kreuzen sich nicht
- Da T ein Spannbaum G ist, ist auch T* ein Spannbaum von G*



Schlussfolgerung

- Jede Kante in G\T wird von genau einer Kante von T* gekreuzt $\Longrightarrow$ (1) $e_G = e_T + e_{T^*}$

Schlussfolgerung

- Jede Kante in G\T wird von genau einer Kante von T* gekreuzt $\Longrightarrow$ (1) $e_G = e_T + e_{T^*}$
- Für jeden Baum gilt: die Anzahl der Ecken ist um eins größer als die Anzahl der Kanten

$\Longrightarrow$ (2) $n = e_T + 1$ und

(3) $f = e_{T^*} + 1$

Schlussfolgerung

Addiert man (2) und (3) und nutzt (1) ergibt sich:

$$n + f = (e_T + 1) + (e_{T^*} + 1)$$
$$= n + f = e + 2$$
$$\Leftrightarrow n - e + f = 2$$

$\blacksquare$

Weitere Beziehungen zwischen den Graphparametern

- Die Anzahl der Ecken kann geschrieben werden als

  (1) $n = n_0 + n_1 + n_2 + \ldots$

  wobei n_i die Anzahl der Ecken vom Grad i in G bezeichnet.

Weitere Beziehungen zwischen den Graphparametern

- Eine Beziehung zwischen der Anzahl der Kanten und der Summe aller Grade ist gegeben durch

(2) $$2e = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots$$

Weitere Beziehungen zwischen den Graphparametern

- Eine Beziehung zwischen der Anzahl der Kanten und der Summe aller Grade ist gegeben durch

(2) $$2e = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots$$

- Der Durchschnittsgrad $\overline{d}$ einer Ecke ist dementsprechend gegeben durch

(3) $$\overline{d} = \frac{2e}{n}$$

Weitere Beziehungen zwischen den Graphparametern

- Die Anzahl der Flächen f kann geschrieben werden als

(4) $$f = f_1 + f_2 + f_3 \ldots$$

wobei f_i die Anzahl der Gebiete bezeichnet, die durch i Kanten begrenzt werden.

Weitere Beziehungen zwischen den Graphparametern

- Eine Beziehung zwischen der Anzahl der Kanten und Gebiete, die sie begrenzen ist gegeben durch

(5) $$2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 \dots$$

Weitere Beziehungen zwischen den Graphparametern

- Eine Beziehung zwischen der Anzahl der Kanten und Gebiete, die sie begrenzen ist gegeben durch

(5) $$2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 \ldots$$

- Die durchschnittliche Seitenanzahl der Gebiete $\overline{f}$ ist dementsprechend gegeben durch

(6) $$\overline{f} = \frac{2e}{f}$$

Weitere Folgerungen

Proposition: *Sei G ein einfacher, ebener Graph mit $n > 2$ Ecken. Dann gilt:*

Weitere Folgerungen

Proposition: *Sei G ein einfacher, ebener Graph mit* $n > 2$ *Ecken. Dann gilt:*

(A) G *hat höchstens* $3n - 6$ *Kanten.*

Weitere Folgerungen

Proposition: *Sei G ein einfacher, ebener Graph mit $n > 2$ Ecken. Dann gilt:*

(A) G *hat höchstens* $3n - 6$ *Kanten.*

(B) G *hat eine Ecke vom Grad höchstens 5.*

Weitere Folgerungen

Proposition: *Sei G ein einfacher, ebener Graph mit $n > 2$ Ecken. Dann gilt:*

(A) G *hat höchstens* $3n - 6$ *Kanten.*

(B) G *hat eine Ecke vom Grad höchstens 5.*

(C) *Wenn die Kanten von* G *zwei-gefärbt werden, dann gibt es eine Ecke von* G *mit höchstens zwei Farbwechseln in der zyklischen Ordnung der Kanten um die Ecke herum.*

Weitere Folgerungen

(A) G *hat höchstens* $3n - 6$ *Kanten.*

Beweis: Jedes Gebiet wird durch mindestens drei Kanten begrenzt (weil G einfach ist). Aus (4) und (5) folgt:

$$f = f_3 + f_4 + f_5 \ldots \qquad \text{und}$$

$$2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 \ldots$$

$$\Rightarrow\ 2e - 3f \geq 0$$

Weitere Folgerungen

Mit $2e - 3f \geq 0$ und der eulerschen Polyederformel folgt:

$$3n - 6 = 3e - 3f \geq e$$

Weitere Folgerungen

(B) G *hat eine Ecke vom Grad höchstens 5*.

Aus (A) ergibt sich für den Durchschnittsgrad $\overline{d}$:

$$\overline{d} = \frac{2e}{n} \leq \frac{6n-12}{n} < 6$$

Also kann eine Ecke höchstens den Grad 5 haben.

Weitere Folgerungen

(C) *Wenn die Kanten von* G *zwei-gefärbt werden, dann gibt es eine Ecke von* G *mit höchstens zwei Farbwechseln in der zyklischen Ordnung der Kanten um die Ecke herum.*

Sei c die Anzahl der Winkel. Angenommen (C) gilt nicht. Dann folgt:

$$c \geq 4n$$

Weitere Folgerungen

- Ein Gebiet mit 2k oder 2k + 1 Kanten hat höchstens 2k Winkel mit Farbwechsel. Daraus folgt:

$$4n \leq c \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 \ldots$$

Weitere Folgerungen

- Ein Gebiet mit 2k oder 2k + 1 Kanten hat höchstens 2k Winkel mit Farbwechsel. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 4n \leq c &\leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 \ldots \\ &\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 \ldots \end{aligned}$$

Weitere Folgerungen

- Ein Gebiet mit 2k oder 2k + 1 Kanten hat höchstens 2k Winkel mit Farbwechsel. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 4n \leq c &\leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 \ldots \\ &\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 \ldots \\ &= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 \ldots) \\ &\quad -4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 \ldots) \end{aligned}$$

Weitere Folgerungen

- Ein Gebiet mit 2k oder 2k + 1 Kanten hat höchstens 2k Winkel mit Farbwechsel. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
4n \leq c &\leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 \dots \\
&\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 \dots \\
&= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 \dots) \\
&\quad -4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 \dots) \\
&= 4e - 4f
\end{aligned}
$$

Weitere Folgerungen

Also folgt:

$$e \geq n + f$$

Dies widerspricht der eulerschen Formel, also gilt auch (C).

$\blacksquare$

Quellen

- Martin Aigner, Günter M. Ziegler: Das BUCH der Beweise, Dritte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
- Louchka Popova-Zeugmann: Lineare Optimierung (Skript)
- https://de.wikipedia.org/wiki/Eulerscher_Polyedersatz
- https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/