Ein Satz von Pólya über Polynome - Buch der Beweise

- Sei $f(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0$, $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$, ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$. $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

- Definiere $C := \{ z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| \leq 2 \}$ ("= Punkte, die in Kreisscheibe vom Radius 2 um 0 abgeb. werden.")

  z.B. $n=1 \Rightarrow C \hat{=}$ Kreisscheibe vom Durchmesser 4 um Punkt b_0

- Eigenschaft von C: Es sei L irgendeine Gerade in der komplexen Ebene und C_L die orthogonale Projektion der Menge C auf L. Dann ist die totale Länge jeder solchen Projektion immer höchstens 4.

- Was ist die totale Länge der Projektion C_L und was bedeutet, dass diese Länge höchstens 4 ist?

- Werden sehen: C_L ist Vereinigung disjunkter Intervalle $I_1, \dots, I_t$. Dann besagt unsere Bedingung: $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq 4$.

- Durch Drehung der Ebene, reicht es den Fall $L \hat{=}$ "reelle Achse" zu betrachten.

Satz 1: Sei $f(z)$ ein komplexes Polynom vom Grad min. 1 und mit höchstem Koeffizienten 1. Weiter sei $C := \{ z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq 2 \}$ und $\mathcal{R}$ die orthogonale Projektion von C auf die reelle Achse. Dann existieren Intervalle $I_1, \dots, I_t$ auf der reellen Achse, die zusammen $\mathcal{R}$ überdecken und die Ungleichung

$$\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq 4$$

erfüllen.

Für $n=1$ wird die Schranke 4 angenommen

- Für bel. $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ist x die orthogonale Projektion auf die reelle Achse.

$$\Rightarrow \mathcal{R} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x+iy \in C \text{ für ein bel. } y \in \mathbb{R} \}$$

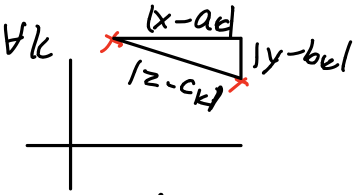
Beweis: Erster Schritt: Schreiben $f(z)$ als

$$f(z) = (z-c_1) \cdot \ldots \cdot (z-c_n)$$
mit $c_k = a_k + i b_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $\forall k = 1, \dots, n$

$\mathbb{C}$ alg. abg. $\Leftrightarrow$ Polynome Grad n haben n NST.

Betrachten reelles Polynom $p(x) = (x-a_1) \cdot \ldots \cdot (x-a_n)$.

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \overset{\text{Pythagoras}}{\Longrightarrow} |x-a_k|^2 + |y-b_k|^2 = |z-c_k|^2 \;\forall k$



$$\Rightarrow \quad |x-a_k|^2 \le |z-c_k|^2 \;\forall y \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow |p(x)| = |x-a_1| \cdot \ldots \cdot |x-a_n| \le |z-c_1| \cdot \ldots \cdot |z-c_n| = |F(z)| \le 2$$

$$\Rightarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \le 2\}$$

Dann reicht zu zeigen, dass man $\mathcal{P}$ mit Intervallen mit einer totalen Länge höchstens 4 überdecken kann ($\Rightarrow$ man kann $\mathcal{R}$ überdecken!)

$\Downarrow$

Satz 2: Sei $p(x)$ ein reelles Polynom vom Grad $n \ge 1$ mit höchstem Koeffizienten 1, dessen NST alle reell sind.
Dann kann die Menge $\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \le 2\}$ durch Intervalle mit einer totalen Länge höchstens 4 überdeckt werden.

- Wie Pólya zeigte, folgt Satz 2 aus einem berühmten Resultat von Tschebyschew. (hier nicht bewiesen)

Satz von Tschebyschev: Sei $p(x)$ ein reelles Polynom vom Grad $n \ge 1$ mit höchstem Koeffizienten 1. Dann gilt

$$\max_{-1 \le x \le 1} |p(x)| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$$

(aus Tschebyschew)
Folgerung: Sei $p(x)$ ein reelles Polynom vom Grad $n \ge 1$ mit höchstem Koeffizienten 1. Gilt $|p(x)| \le 2$ für alle x im Intervall $[a,b]$, so folgt $b - a \le 4$

Beweis: (Folgerung) Durch Substitution $y = \frac{2}{b-a}(x-a) - 1$ ($\Rightarrow x =$) wird das x-Intervall $[a,b]$ auf das y-Intervall $[-1,1]$ abgebildet. Das zugehörige Polynom

$$q(y) = p\left(\frac{b-a}{2}(y+1) + a\right)$$

hat als höchsten Koeffizienten $\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$ und erfüllt

$$\max_{-1 \le y \le 1} |q(y)| = \max_{a \le x \le b} |p(x)|$$

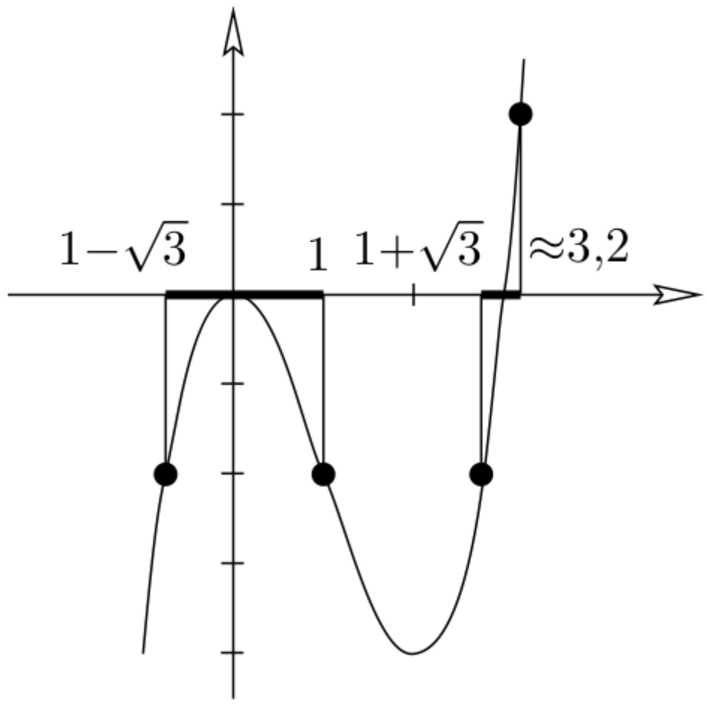
$$\overset{\text{Tschebyschew}}{\Longrightarrow} \quad 2 \ge \max_{a \le x \le b} |p(x)| \ge \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad 1 \ge \left(\frac{b-a}{4}\right)^n \Rightarrow \quad 1 \ge \frac{b-a}{4} \Rightarrow b - a \le 4$$

$\square$

Falls $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} \mid |p(x)| \le 2\}$ ein Intervall wäre, so wäre die Länge höchstens 4. Muss jedoch kein Intervall sein.

Beispiel:



Für das Polynom $p(x) = x^2(x-3)$ ist
$\mathcal{P} = [1-\sqrt{3}, 1] \cup [1+\sqrt{3}, \approx 3{,}2]$

Aussagen über $\mathcal{P}$: · $p(x)$ stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ disj. Vereinigung abgeschl. Intervalle $I_1, I_2, \ldots$
(stetig: Urbilder abg. Mengen wieder abg.)
und $p(x)$ nimmt Wert 2 oder -2 an den Randpunkten jedes Intervalls an.

$\Rightarrow$ nur endlich viele Intervalle $I_1, \ldots, I_t$, da $p(x)$ die Werte nur endl. oft annehmen kann. (falls z.B. 2 unendl. oft, dann hätte $p(x)-2$ unendl. viele NST

Wunderbare Idee von Pólya: Konstruktion von $\tilde{p}(x)$ mit Grad n, höchster Koef. 1, so dass $\tilde{\mathcal{P}} := \{x \in \mathbb{R} \mid |\tilde{p}(x)| \leq 2\}$ ein Intervall ist mit mind. der Länge $\ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t)$
Korollar liefert dann $\ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t) \leq 4$

Beweis: (Satz 2) Wir betrachten $p(x) = (x-a_1) \cdot \ldots \cdot (x-a_n)$
mit $\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\} = I_1 \cup \ldots \cup I_t$, wobei $I_1 < I_2 < \ldots < I_t$

Erste Behauptung: Jedes Intervall I_j enthält eine NST von $p(x)$. ($\Rightarrow t \leq n$)

Wissen bereits, dass $p(x)$ die Werte ± 2 an den Endpunkten von jedem I_j annimmt.
Falls einer dieser Werte $+2$ und der andere -2 ist, so existiert jedenfalls eine Wurzel in I_j.
Sei also $p(x) = 2$ an beiden Endpunkten (-2 analog).
Sei nun $b \in I_j$ ein Punkt in dem $p(x)$ sein Minimum in I_j annimmt
$\Rightarrow p'(b) = 0$ und $p''(b) \geq 0$ (Existenz: Weierstraß)
Falls $p''(b) = 0$, ist b eine vielfache NST von $p'(x)$, und somit eine Wurzel von $p(x)$. (erstes Resultat)

Zwei Resultate über Polynome mit reellen Nullstellen

Sei $p(x)$ ein nicht-konstantes Polynom, das nur reelle Nullstellen hat.

Resultat 1. *Wenn b eine mehrfache Nullstelle von $p'(x)$ ist, so ist b auch eine Nullstelle von $p(x)$.*

■ **Beweis.** Seien $b_1 < \ldots < b_r$ die Nullstellen von $p(x)$, mit den Vielfachheiten $s_1, \ldots, s_r$, $\sum_{j=1}^r s_j = n$. Aus $p(x) = (x - b_j)^{s_j} h(x)$ schließen wir, dass jedes b_j mit $s_j \geq 2$ eine Wurzel von $p'(x)$ ist, und dass die Vielfachheit von b_j in $p'(x)$ gleich $s_j - 1$ ist. Weiterhin sehen wir, dass es eine Nullstelle von $p'(x)$ zwischen b_1 und b_2 gibt, eine weitere zwischen b_2 und b_3, …, und eine zwischen b_{r-1} und b_r, und alle diese Nullstellen müssen einfache Nullstellen sein, da $\sum_{j=1}^r (s_j - 1) + (r - 1)$ bereits zu $n - 1$ summiert, also genau dem Grad von $p'(x)$. Folglich können die *mehrfachen* Nullstellen von $p'(x)$ nur unter den Wurzeln von $p(x)$ auftreten. □

Resultat 2. *Es gilt $p'(x)^2 \geq p(x)p''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

■ **Beweis.** Ist $x = a_i$ eine Nullstelle von $p(x)$, so ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, x sei keine Nullstelle. Mit der Produktregel aus der Differentialrechnung berechnen wir

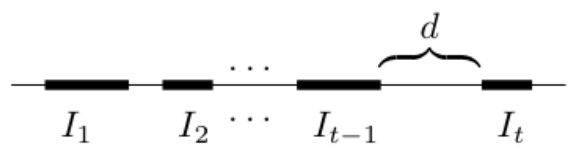
$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(x)}{x - a_k}, \quad \text{also} \quad \frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - a_k}.$$

Davon nehmen wir die Ableitung, und erhalten

$$\frac{p''(x)p(x) - p'(x)^2}{p(x)^2} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - a_k)^2} < 0. \qquad \square$$

Falls $p''(b) > 0$, schließen wir $p(b) \leq 0$ (Resultat 2)
Somit haben wir $p(b) = 0$ und unsere NST oder $p(b) < 0$, woraus wir eine NST im Intervall von b zu einem der Endpunkte von I_j erhalten.

Entscheidende Idee des Beweises: $I_1, \ldots, I_t$ wie vorhin.
Annahme Intervall I_t am rechten Rand enthält m NST.
Falls $m = n$ (Grad $p = n$) ist, ist I_t das einzige Intervall $\Rightarrow$ Aussage bewiesen.
Wir nehmen also $m < n$ an: Sei d der Abstand zwischen I_{t-1} und I_t.
Mit $b_1, \ldots, b_m$ bezeichnen wir die NST in I_t und mit $c_1, \ldots, c_{n-m}$ die übrigen NST.
Schreiben $p(x) = q(x)\, r(x)$, wobei
$q(x) = (x - b_1) \cdot \ldots \cdot (x - b_m)$, $r(x) = (x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_{n-m})$
und setzen $p_1(x) = q(x+d)\, r(x)$
$\Rightarrow p_1(x)$ hat Grad n und höchsten Koeffizienten 1.



$x+d$ näher an b_i
Für $x \in I_1 \cup \ldots \cup I_{t-1}$ haben wir $|x + d - b_i| < |x - b_i| \quad \forall i = 1, \ldots, m$
$\Rightarrow |q(x+d)| = |(x+d-b_1)| \cdot \ldots \cdot |(x+d-b_m)| < |x - b_1| \cdot \ldots \cdot |x - b_m| = |q(x)|$, $x \in I_1 \cup \ldots \cup I_{t-1}$
("=" wegen NST $p(y) = 0$)

$$\Longrightarrow |p_1(x)| \leq |p(x)| \leq 2 \qquad \text{für } x \in I_1 \cup \ldots \cup I_{t-1}$$

$x-d$ näher an c_i
Falls $x \in I_t$, so ist $|r(x-d)| \leq |r(x)|$ und somit

$$|p_1(x-d)| = |q(x)|\,|r(x-d)| \leq |p(x)| \leq 2 \quad \text{für } x \in I_t$$

nicht mehr disjunkt

Dies aber bedeutet $I_1 \dot\cup \ldots \dot\cup (I_{t-1} \dot\cup (I_t - d)) \subseteq \mathcal{P}_1 := \{x \in \mathbb{R} : |p_1(x)| \leq 2\}$

(immernoch disjunkt)

$\Rightarrow$ totale Länge von $\mathcal{P}_1$ ist mindestens so groß wie die von $\mathcal{P}$.

Außerdem sind beim Übergang von $p(x)$ zu $p_1(x)$ die Intervalle I_{t-1} und $(I_t - d)$ in ein gemeinsames Intervall verschmolzen. (jedoch: $I_{t-1} \cap (I_t - d) = \{x\}$)

$\Rightarrow \ell(I_{t-1} \cup (I_t - d)) = \ell(\,) + \ell(\,)$

$\Rightarrow$ Intervalle $J_1, \ldots, J_s$ von $p_1(x)$, die $\mathcal{P}_1$ bestimmen, haben totale Länge von mind. $\ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t)$ und $J(s)$ enthält mehr als m NST von $p_1(x)$.

Wir wiederholen Konstruktion höchstens $t-1$ mal und erhalten Polynom $\tilde{p}(x)$, wobei $\tilde{\mathcal{P}} = \{x \in \mathbb{R} : |\tilde{p}(x)| \leq 2\}$ ein Intervall der Länge $\ell(\tilde{\mathcal{P}}) \geq \ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t)$ ist,

und der Beweis ist vollständig. $\square$

Quellen: Das Buch der Beweise, M. Aigner, G. Ziegler: 3te Auflage

Vortrag von Lasse Kolb - Proseminar: Buch der Beweise