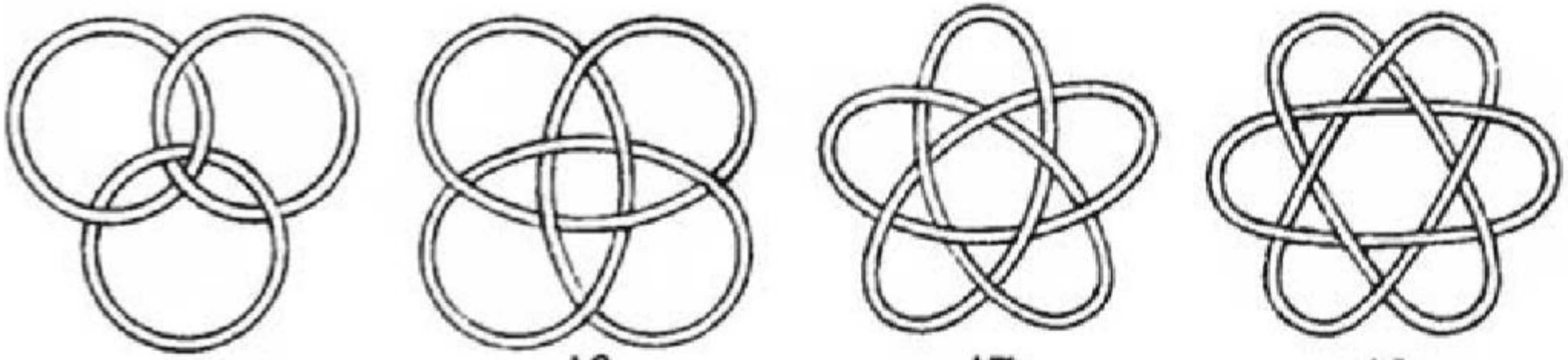
Die borromäischen Ringe

Nils Steinert

Lassen sich die borromäischen Ringe aus drei gleichen Kreisen zusammensetzen?

Knoten und Verschlingungen

- Knotentheorie begründet 1867 von William ‘Lord Kelvin’ Thompson als Teil der *Vortex-Theorie*
- Peter Guthrie Tait stellt 1876 erste Knotentabellen vor:



15 16 17 18

- 1892 führt Hermann Brunn verallgemeinernd Verschlingungen mit k Komponenten ein, für die jede beliebige Unterkonfiguration mit k-1 Komponenten trivial ist: die *brunnschen Verschlingungen*

Beweis

- 1. Beweis der nicht-Existenz borromäischer Ringe aus 3 gleichen Kreisen gelang 1987 Michael Freedman und Richard Skora
- Beweis im BUCH basiert auf einer Ausarbeitung von Ian Algol
- Idee: *aus spährischen Kuppeln einen Film machen, der die Auflösung einer gegebenen Verschlingung als kontinuierliche Bewegung zeigt*
- Widerlegt nicht nur die Existenz der borromäischen Ringe, sondern belegt zudem, dass jede aus gleichen Kreisen realisierbare brunnsche Verschlingung trivial sein muss
- 2. Beweis 1993 von Ollie Naynes, basierend auf Arbeiten von Ralph Fox

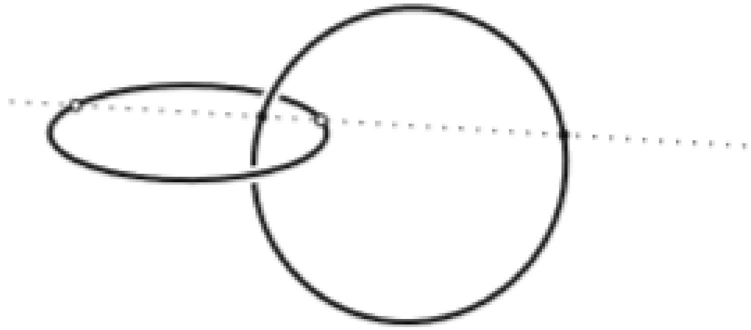
Satz

Wenn eine Verschlingung aus perfekten Kreisen besteht, die paarweise nicht verschlungen sind, dann ist sie trivial.

Annahmen

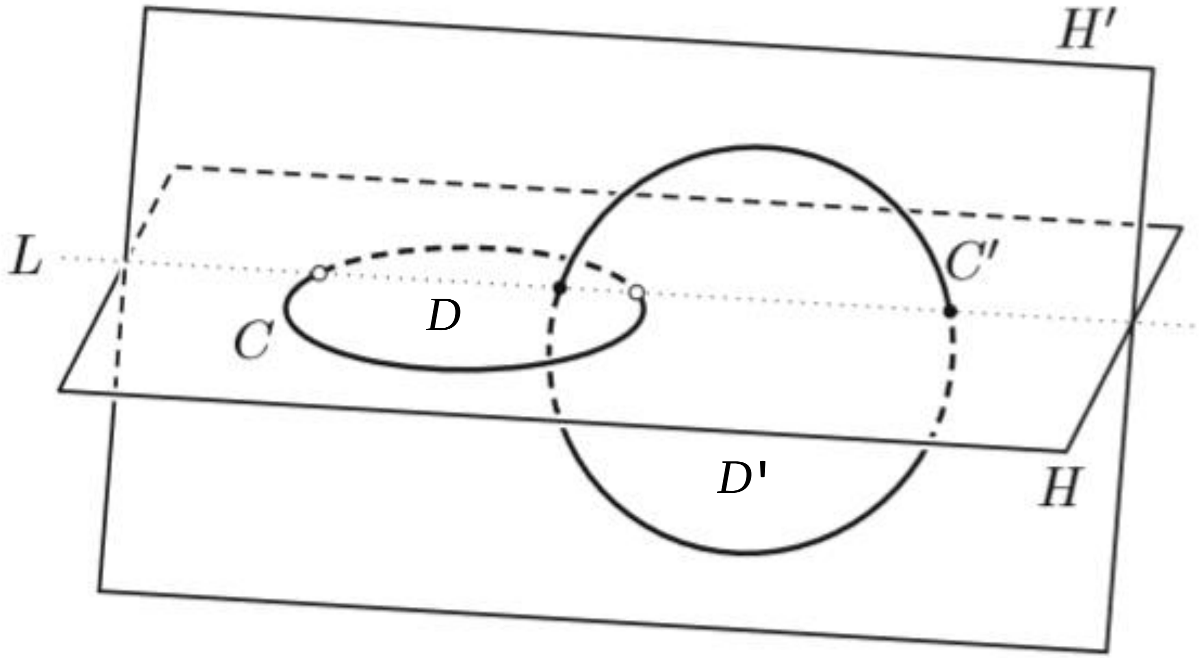
1. Alle Kreise liegen in unterschiedlichen Ebenen
2. Keine dieser Ebenen sind parallel zueinander
3. Keine der von einem Kreis aufgespannten Ebenen enthält den Mittelpunkt eines anderen Kreises

Definition



Zwei Kreise sind im $\mathbb{R}^3$ verschlungen, wenn einer von ihnen die flache Kreisscheibe, die der andere Kreis aufspannt, genau einmal schneidet (und nicht nur berührt).

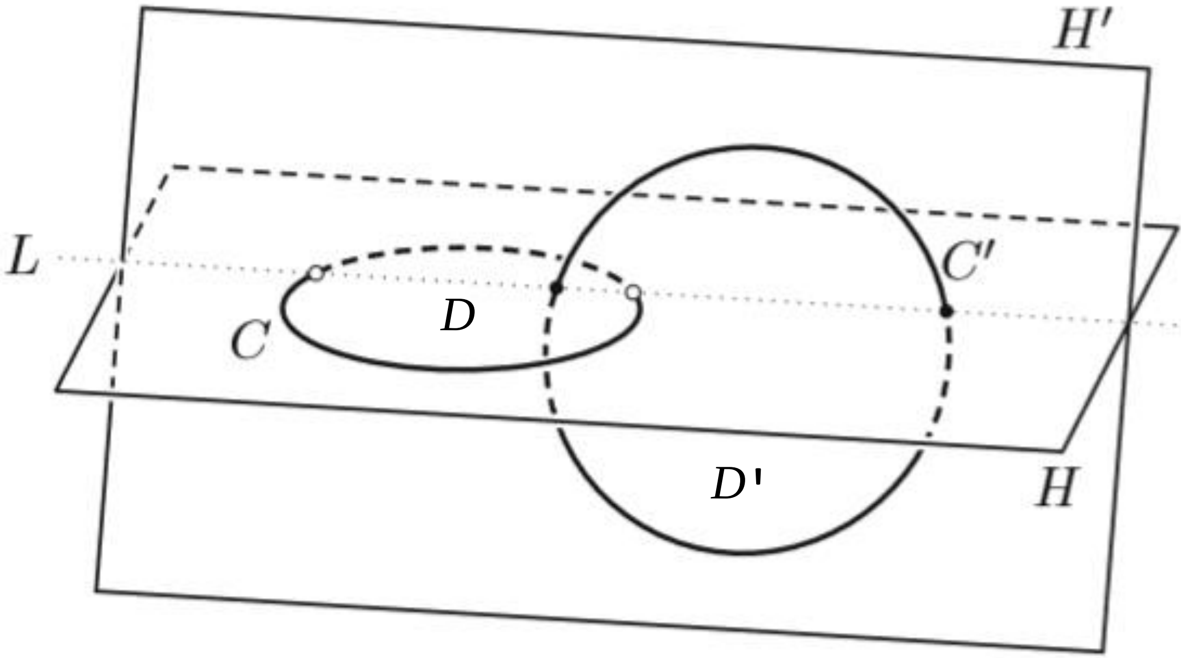
Definition

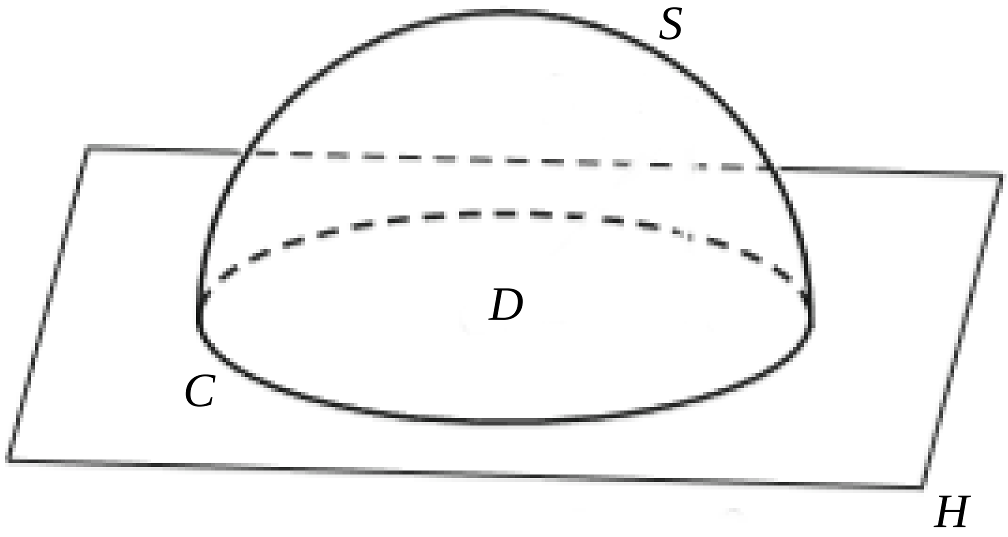


$C \subseteq \mathbb{R}^3$

$L := H \cap H'$

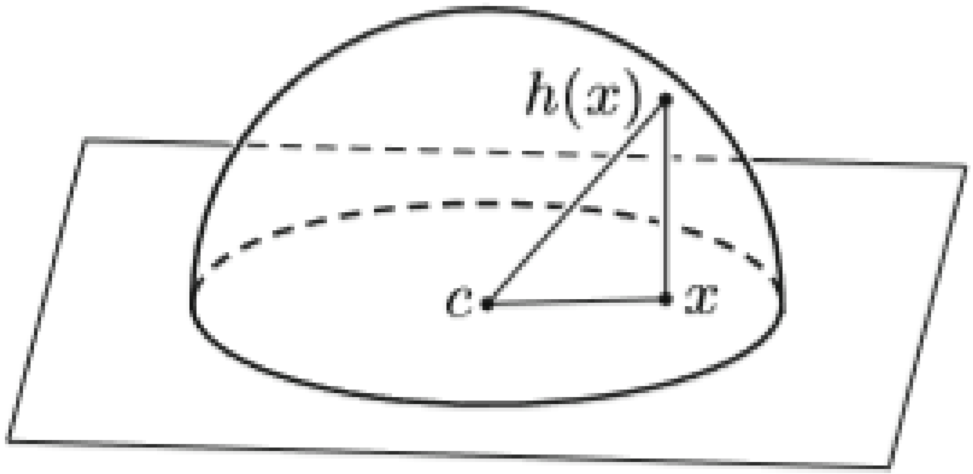
Definition





$S \subseteq \mathbb{R}^4$

Konstruktion der Kuppel



$$|x - c|^2 + |h(x) - 0|^2 = r^2$$

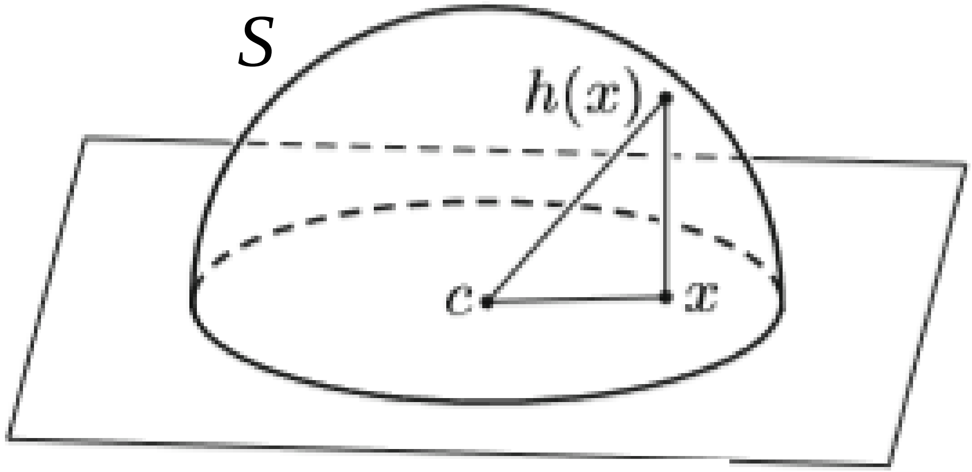
Für jeden Kreis $C \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt c und Radius r gibt es eine 2-dimensionale Hemisphäre $S \subseteq \mathbb{R}^4$, die als Graph $\{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}: x \in D\}$ mit $h : D \to \mathbb{R}$, $h(x) := \sqrt{r^2 - |x-c|^2}$ gegeben ist, welche auf der abgeschlossenen Kreisscheibe D mit Rand C definiert ist.

Behauptung

Wenn zwei Kreise C, C‘ $\subseteq \mathbb{R}^3$ nicht verschlungen sind, dann sind die zugehörigen sphärischen Kuppeln S, S‘ $\subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ disjunkt.

Beweis der Kontraposition

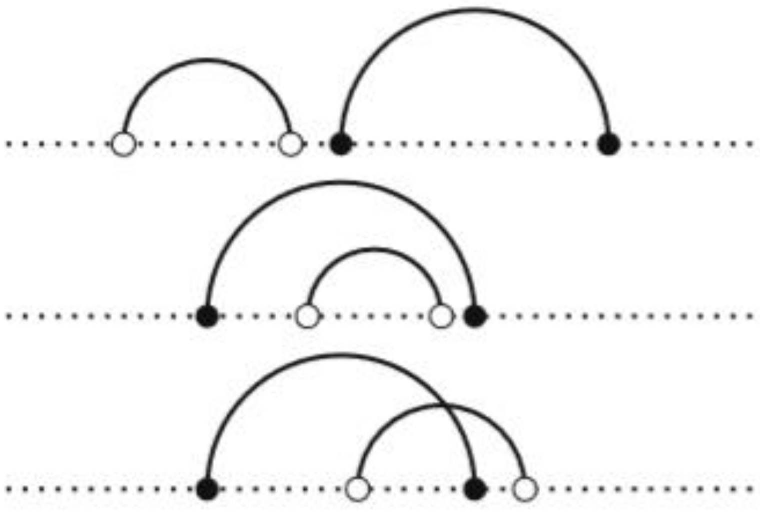
- Sei (x_0, t_0) ein Punkt im Schnitt $S \cap S'$.
- Da (x_0, t_0) in S liegt, haben wir $x_0 \in D$.
- Genauso erhalten wir, weil (x_0, t_0) in S' liegt, dass $x_0 \in D'$ gilt.
- Also liegt x_0 auf der Geraden L, und genauso auch in der Menge $D \cap D'$, auf der h und h' beide definiert sind.



Beweis der Kontraposition

- Die Funktionen h und h' sind auf D bzw. D' definiert.
- Schränkt man diese auf die Gerade L, dann definieren h und h' dort perfekte Halbkreise (mit Definitionsbereich $D \cap L$ bzw. $D' \cap L$)
- Weil sich die Halbkreise über $D \cap L$ bzw. $D' \cap L$ schneiden, müssen ihre Paare von Endpunkten $S \cap L$ und $S' \cap L$ auf der Geraden L alternieren.

=> Die Kreise sind verschlungen.



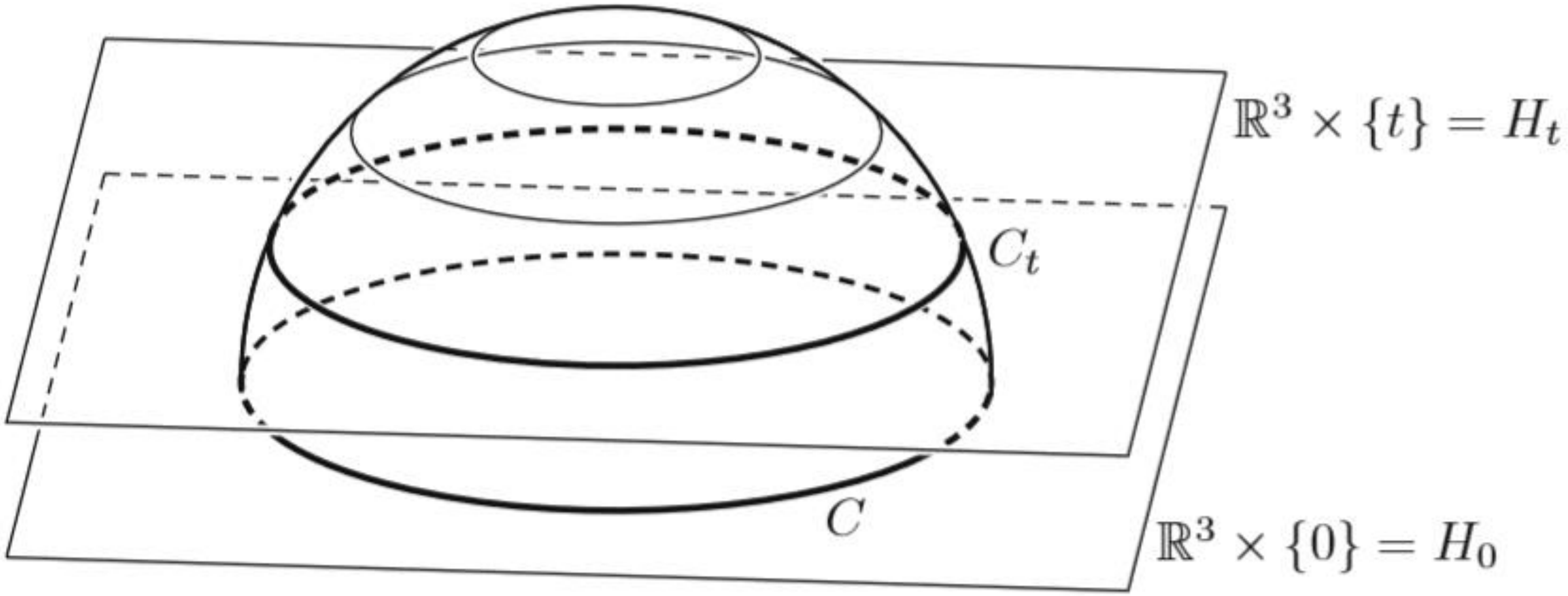
Behauptung

Wenn zwei Kreise C, C‘ $\subseteq \mathbb{R}^3$ nicht verschlungen sind, dann sind die zugehörigen sphärischen Kuppeln S, S‘ $\subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ disjunkt. ■

Satz

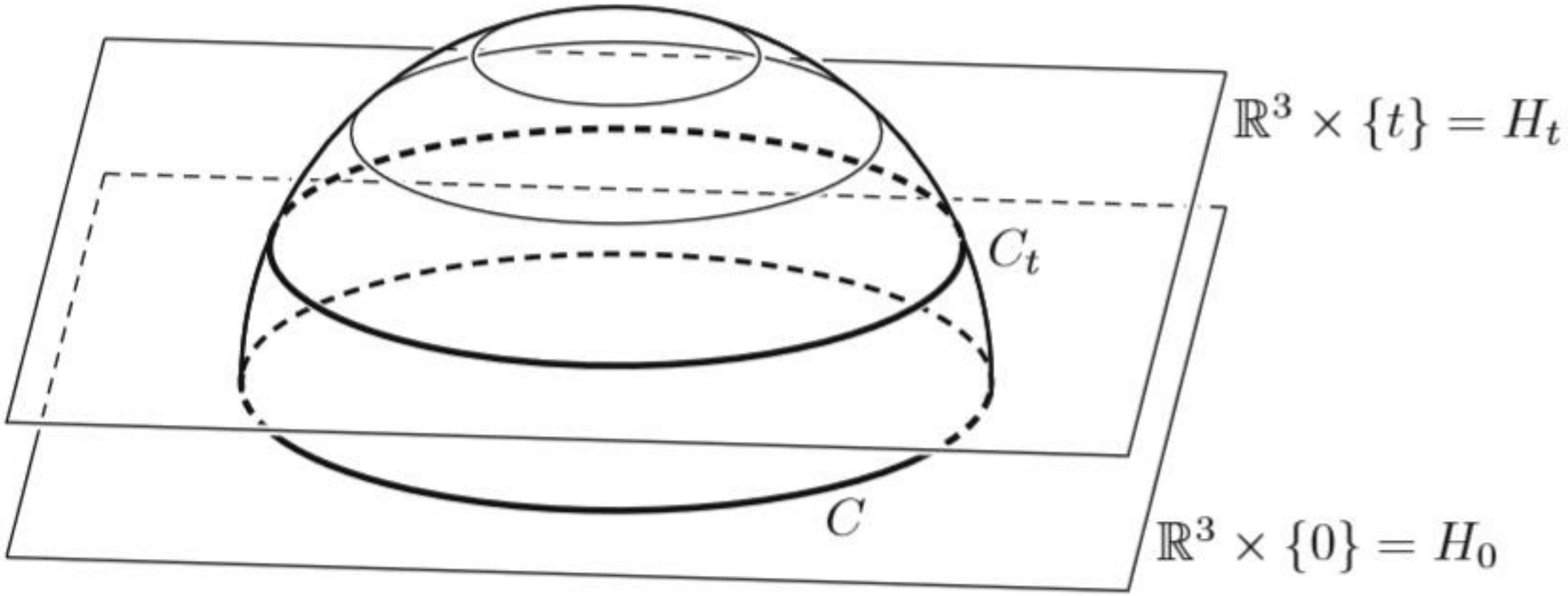
Wenn eine Verschlingung aus perfekten Kreisen besteht, die paarweise nicht verschlungen sind, dann ist sie trivial.

Beweis



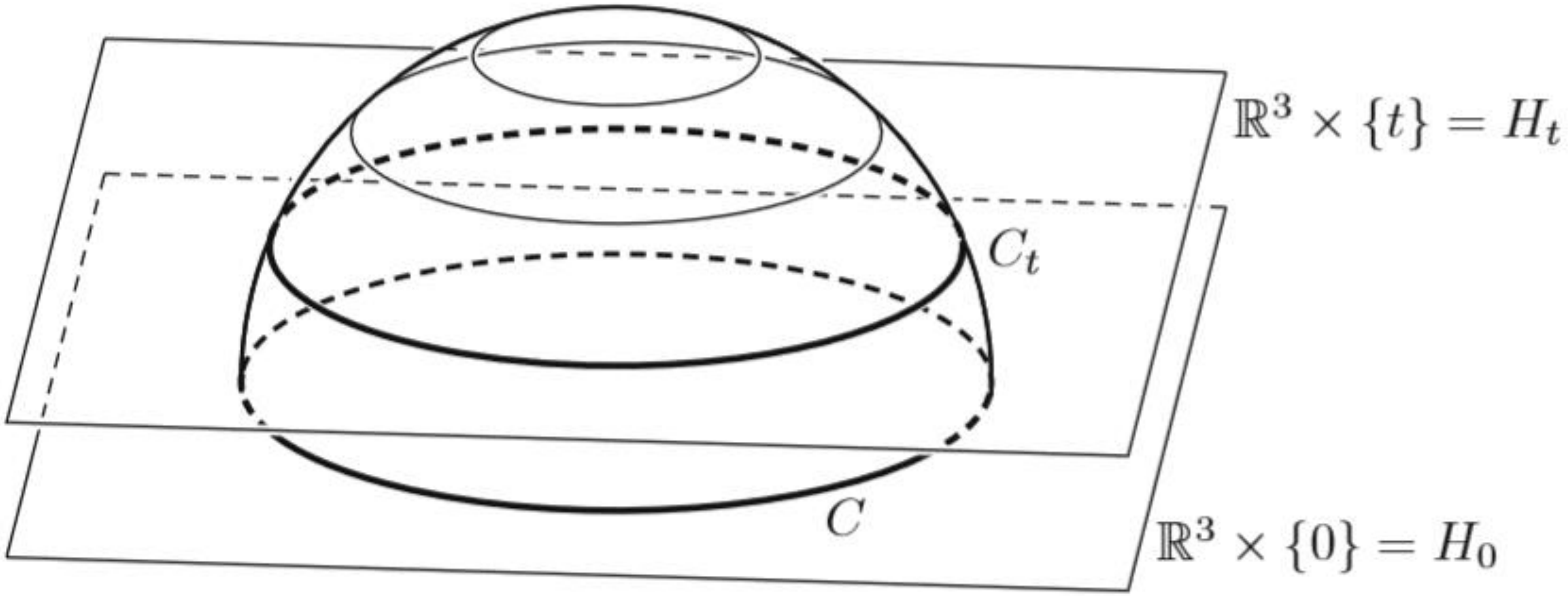
Identifizieren des Raumes $\mathbb{R}^3$, der die Verschlingung enthält, mit der Schicht $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ im Raum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, der die Kuppeln enthält.

Beweis



Weder die Mittelpunkte der Kreise, noch die Ebenen, die diese aufspannen, ändern sich.

Beweis



t stetig inkrementieren, bis alle Kreisschreiben D disjunkt sind, die Verschlingung also trivial ist.

Satz

Wenn eine Verschlingung aus perfekten Kreisen besteht, die paarweise nicht verschlungen sind, dann ist sie trivial. ■

Die borromäischen Ringe

gibt es nicht.

Quelle

M. Aigner / G. Ziegler: *Das BUCH der Beweise, 4. Auflage*.
Springer: *Berlin*, 2015.

?