Das Schubfachprinzip

Florian Heinrichs

Prinzip und Verallgemeinerung

Wenn man n Objekte auf r Fächer verteilt, wobei $n > r$ ist, dann gibt es mindestens ein Fach mit mehr als einem Objekt.

- Beweis per Widerspruch:
  in jedem Fach ist höchstens ein Objekt
  → höchstens so viele Objekte wie Fächer
  → $n \leqslant r$ → Widerspruch zur Voraussetzung, dass $n > r$

- seien N und R endliche Mengen, mit
  $|N| = n > r = |R|$ und $f: N \to R$ eine Abbildung,
  dann gibt es ein $a \in R$ mit $|f^{-1}(a)| \geq 2$

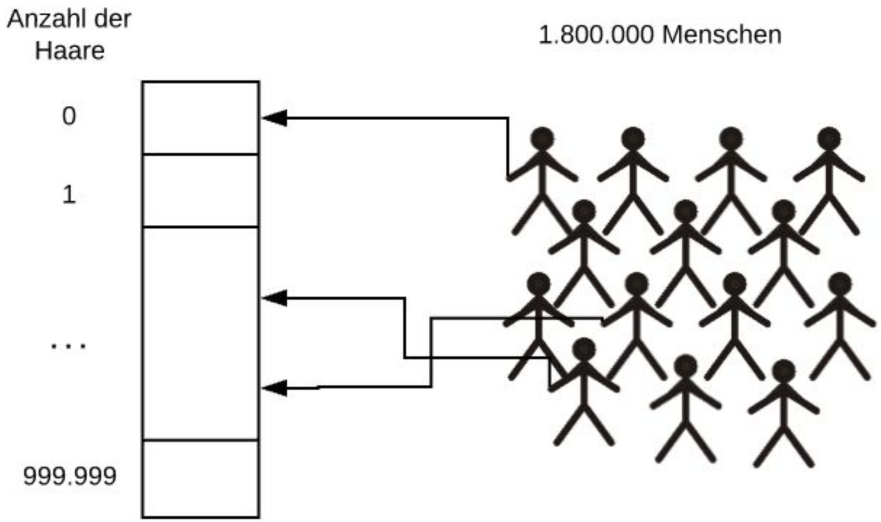
- Verallgemeinerung:
  es existiert ein $a \in R$ mit $|f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil$

- alternative Schreibweise:
  n Objekte auf r Fächer, wobei $n > a*r$, dann mindestens ein Fach mit mehr als a Objekten

- Beweis analog per Widerspruch

Einstiegsbeweis

- zeigen, dass es in Hamburg mindestens 2 Menschen mit genau gleich vielen Haaren gibt
- jeder Mensch hat weniger als 1.000.000 Haare
- Fach für jede Anzahl von Haaren → r = 1 Mio.
- in Hamburg leben ca. 1.800.000 Menschen
  → n = 1,8 Mio.
- somit n > r
  → 2 Menschen mit derselben Anzahl von Haaren



1. Zahlen

Von den Zahlen 1, 2, . . . , 2n wählen wir irgendwelche n + 1 Zahlen aus. Dann gibt es unter diesen Zahlen immer zwei ohne gemeinsamen Teiler.

- gibt immer 2 aufeinander folgende Zahlen
- diese haben Differenz 1 und sind somit teilerfremd

Sei eine Menge $A \subseteq \{1, 2, . . . , 2n\}$ mit $|A| = n + 1$. Dann gibt es immer zwei Zahlen in A, sodass eine die andere teilt.

- schreiben $a \in A$ in der Form $2^k *m$
- m ist ungerade Zahl zwischen 1 und 2n - 1
- n ungerade Anteile → n Fächer (r = n)
- n + 1 Zahlen in A → n+1 Objekte (n’ = n+1)
- n’ > r → zwei Zahlen haben denselben ungeraden Anteil → eine teilt die andere

2. Folgen

In einer Folge $a_1, a_2, \ldots, a_{mk+1}$ von mk + 1 verschiedenen reellen Zahlen, gibt es immer eine steigende Teilfolge

$$a_{i\,1} < a_{i\,2} < \ldots < a_{i\,m+1} \quad (i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1})$$

der Länge m + 1, oder eine fallende Teilfolge

$$a_{j\,1} < a_{j\,2} < \ldots < a_{j\,k+1} \quad (j_1 < j_2 < \ldots < j_{k+1})$$

der Länge k + 1, oder beides.

- definiere f: $a_i \rightarrow t_i$, wobei t_i = längste steigende Teilfolge die mit a_i anfängt
- Fall 1: für ein i ist $t_i \geq m + 1$
  → es gibt steigende Teilfolge der Länge m+1

- Fall 2 : $t_i \leq m$ für alle i
  → f bildet $\{a_1, \ldots, a_{mk+1}\}$ auf $\{1, \ldots, m\}$ ab
- Fach für jedes t_i (r = m)
- mk + 1 Zahlen a_i (n = mk +1)
  → n > kr → ein Fach mit mindestens
  k + 1 Zahlen a_i , mit gleichem t_i
- diese Zahlen $a_{j\,1}, \ldots, a_{j\,k+1}$ $(j_1 < \ldots < j_{k+1})$ bilden fallende Teilfolge, da $a_{j\,i} > a_{j\,i+1}$

3. Summen

Gegeben seien m ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_m$,die nicht verschieden sein müssen. Dann gibt es immer einen Abschnitt aufeinander folgender Zahlen a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots, a_j$ deren Summe $\sum_{i=k+1}^{j} a_i$ ein Vielfaches von m ist.

- setzen $N = \{0, a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_m\}$
- $R = \{0, 1, \ldots, m-1\}$

- definieren f: N → R, wobei f(i) der Rest von i durch m ist
- $|N| = m + 1 > m = |R|$
  → es gibt 2 Summen $a_1+\ldots+a_k$ und $a_1+\ldots+a_j$ die durch m denselben Rest bilden

$$\sum_{i=k+1}^{j} a_i = \sum_{i=1}^{j} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i$$

- hat bei Division durch m den Rest 0

4. Graphen

Bei einem Graphen mit 6 Knoten gibt es immer einer 3er Clique oder 3er Anti-Clique.

- betrachten ein festen Knoten (A)
- 5 verbleibende Knoten (n = 5)
- Fach “mit A verbunden” und “nicht mit A verbunden” (r = 2)
  → ein Fach mit mindestens 3 Elementen

4. Graphen

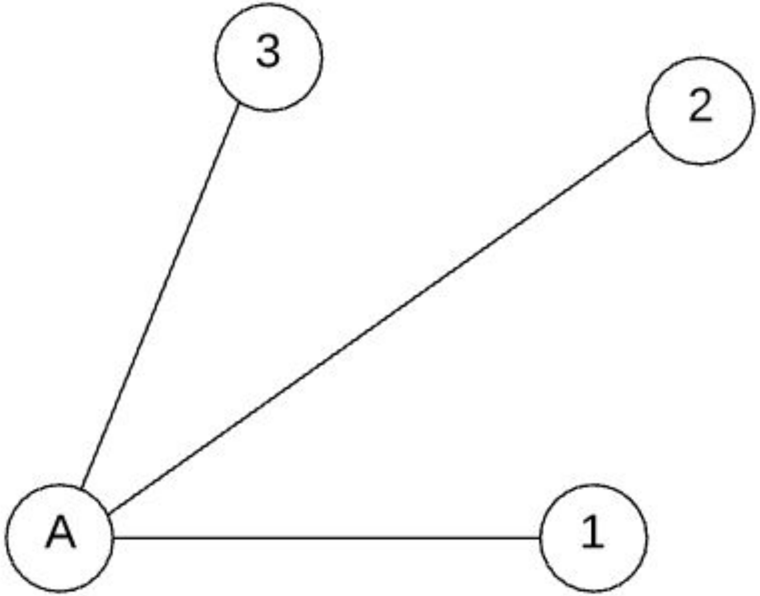
Bei einem Graphen mit 6 Knoten gibt es immer einer 3er Clique oder 3er Anti-Clique.

Fall 1:

- min. 3 Elemente mit A verbunden (1,2,3)

Fall 1.1:

- alle Knoten 1, 2 und 3 paarweise nicht verbunden
  → es gibt 3er Anti-Clique



4. Graphen

Bei einem Graphen mit 6 Knoten gibt es immer einer 3er Clique oder 3er Anti-Clique.

Fall 1:

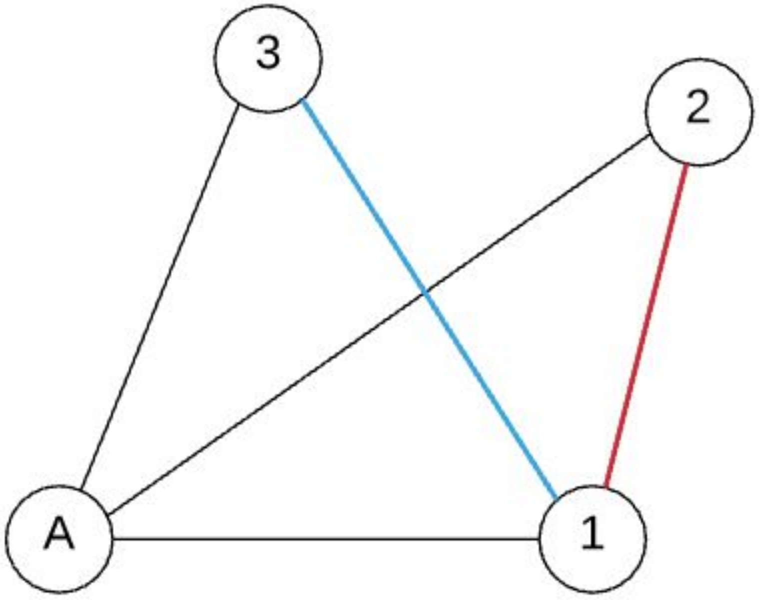
- min. 3 Elemente mit A verbunden (1,2,3)

Fall 1.1:

- alle Knoten 1, 2 und 3 paarweise nicht verbunden
  → es gibt 3er Anti-Clique

Fall 1.2:

- min. eine Kante zwischen 1, 2 oder 3
  → es gibt eine 3er Clique

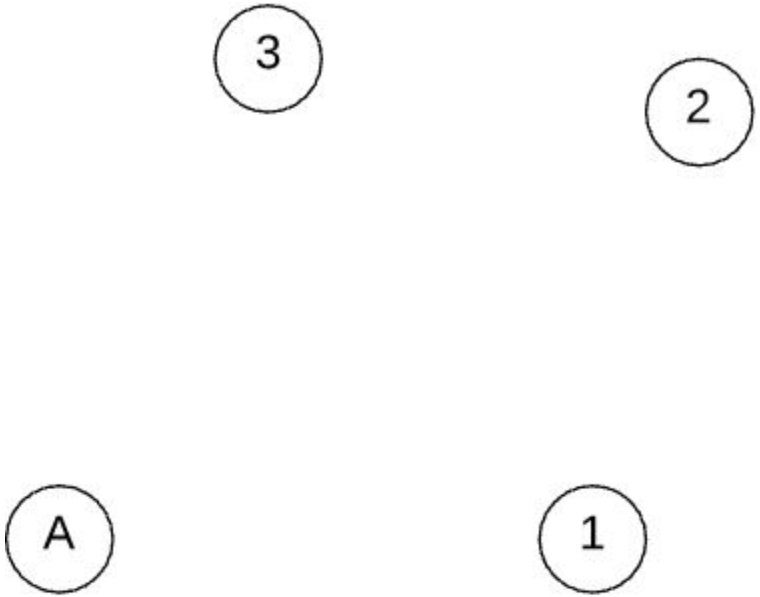


4. Graphen

Bei einem Graphen mit 6 Knoten gibt es immer einer 3er Clique oder 3er Anti-Clique.

Fall 2:

- min. 3 Elemente nicht mit A verbunden (1,2,3)



4. Graphen

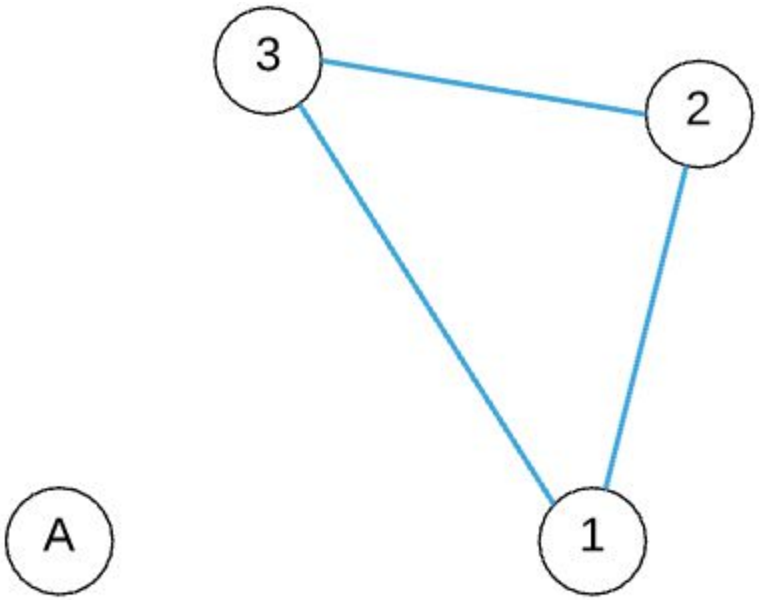
Bei einem Graphen mit 6 Knoten gibt es immer einer 3er Clique oder 3er Anti-Clique.

Fall 2:

- min. 3 Elemente nicht mit A verbunden (1,2,3)

Fall 2.1:

- alle Knoten 1,2 und 3 paarweise verbunden
  → es gibt 3er Clique



4. Graphen

Bei einem Graphen mit 6 Knoten gibt es immer einer 3er Clique oder 3er Anti-Clique.

Fall 2:

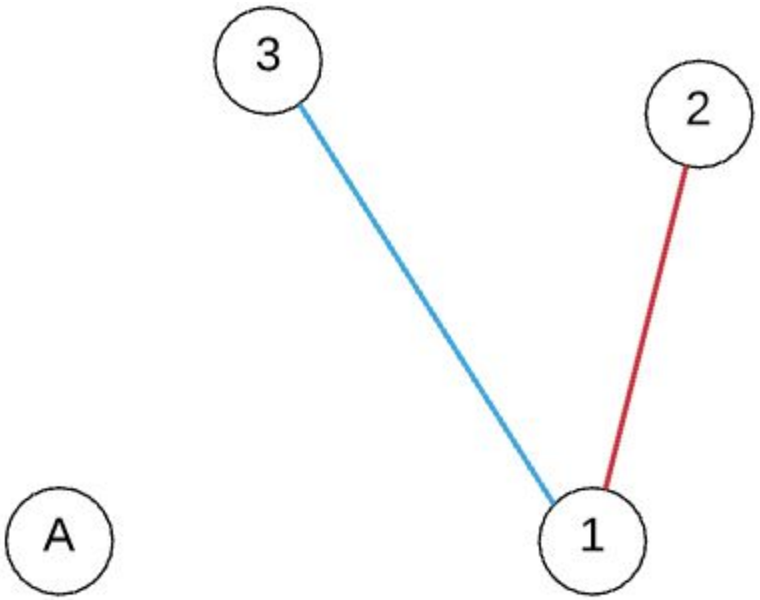
- min. 3 Elemente nicht mit A verbunden (1,2,3)

Fall 2.1:

- alle Knoten 1, 2 und 3 paarweise verbunden
  → es gibt 3er Clique

Fall 2.2:

- min. 2 Knoten von 1, 2 und 3 sind nicht verbunden
  → es gibt eine 3er Anti-Clique



Quellen

- Buch der Beweise
- http://www.mathematikinformation.info/pdf2/MI55Schelthoff.pdf