Binomialkoeffizienten sind fast nie Potenzen

Motivation: Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

$\binom{n}{k}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & & & & & \vdots & & & & & & \end{array}$$

- Davor gesehen:

Satz: (Bertrandsche Postulat) Für jedes $n \in \mathbb{N}, n > 1$, gibt es min. eine Primzahl p mit $n < p < 2n$

Satz: (Verschärfung des Bertrandschen Postulat, Satz von Sylvester 1892) Ist $n \geq 2k$, so hat min. eine der Zahlen $n, n-1, \dots, n-k+1$ einen Primteiler p, der größer als k ist.

$$\Updownarrow$$

Satz: Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ $(n \geq 2)$ hat einen Primteiler $p > k$.

Fragestellung: Für welche $n, k, m, l \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{k} = m^l$?

- Für $k = 1$ finden wir für alle $m, l \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ ("zweite Spalte": alle Zahlen)
- Für $k = l = 2$ gibt es unendlich viele Lösungen:

Beh: Wenn $\binom{n}{2} = m^2$, dann ist auch $\binom{(2n-1)^2}{2}$ ein Quadrat.

Bws: $-\binom{n}{2} = m^2 \Rightarrow n(n-1) = 2m^2$.

$$\Rightarrow \binom{(2n-1)^2}{2} = \tfrac{1}{2}(2n-1)^2\cdot((2n-1)^2-1) = \tfrac{1}{2}(2n-1)^2\, 4n(n-1) \overset{n(n-1)=2m^2}{=} (2m(2n-1))^2 \ \checkmark$$

- Jetzt brauchen wir einen Anfangswert: z.B $\binom{9}{2} = 36 = 6^2$ ✓
  $\rightarrow \binom{289}{2} = 204^2$

- Nicht alle Lösungen: $\binom{50}{2} = 35^2$ beginnt neue Serie

- Für $k=3$, $\ell=2$ (also $\binom{n}{3}=m^2$) ist $n=50$, $m=140$ eindeutige Lösung
- Für $k\geq 4$, $\ell\geq 2$ gibt es keine Lösungen $\to$ Satz von Erdős

Satz: Die Gleichung $\binom{n}{k}=m^\ell$ hat keine ganzzahligen Lösungen für $\ell\geq 2$, $4\leq k\leq n-4$.

Beweis: (Beweis per Widerspruch)

Annahme: Satz falsch: $\binom{n}{k}=m^\ell$ sei ganzzahlige Lösung.

- Weil $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ können wir annehmen $2k\leq n$.

(1): Satz von Sylvester $\Rightarrow \exists\, p$ Prim: $p>k \wedge p \mid \binom{n}{k}=m^\ell$

- Weil $p \mid m^\ell = (p_{1,m}^{a_1}\cdot\ldots\cdot p_{n,m}^{a_n})^\ell = p_{1,m}^{a_1\cdot\ell}\cdot\ldots\cdot p_{n,m}^{a_n\cdot\ell} \Rightarrow p\in\{p_{1,m},\ldots,p_{n,m}\}$

  $\Rightarrow p^\ell \mid m^\ell = \binom{n}{k} \Rightarrow p^\ell \mid \underbrace{(n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1))}_{\binom{n}{k}\cdot k!}$

- Da $p>k$ kann nur einer der Faktoren $n-i$ Vielfaches von p sein $\Rightarrow p^\ell \mid n-i$ $(i\in\{0,\ldots,k-1\})$

  $\Rightarrow \quad n\geq p^\ell > k^\ell \geq k^2 \qquad (\mathrm{I})$

(2) Betrachten bel. Faktor $n-j$ $(j\in\{0,\ldots,k-1\})$ des Zählers und schreiben ihn als $n-j=a_j m_j^\ell$, wobei a_j nicht echt durch eine ℓ-Potenz teilbar ist.

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ a_j hat nur Primteiler $\leq k$. $\Rightarrow$ Hätte a_j noch einen Primteiler $\tilde{p}>k$, dann $n-j$ hat Zerlegung $\tilde{p}^{i}\cdot r$ $\tilde{p}^{\ell-i}$ muss noch in $\binom{n}{k}$ vorkommen $\Rightarrow$ zwei Faktoren $n-i$, $n-j$ sind unters. Vielfache von $\tilde{p}>k$ ↯

- Wollen zeigen $a_i\neq a_j$ für $i\neq j$. Widerspruchsbeweis:

  Annahme: $a_i=a_j$ für $i<j$.

  $n-j=a_j m_j^\ell$
  $n-i=a_i m_i^\ell$
  $n-j<n-i \Rightarrow a_j m_j^\ell < a_i m_i^\ell$
  $\Rightarrow m_j^\ell < m_i^\ell$
  $\Rightarrow m_j<m_i \Rightarrow m_j+1\leq m_i$

  $\Rightarrow \quad m_i\geq m_j+1 \quad$ und

  $k>\underbrace{(n-i)-(n-j)}_{=j-i \text{ und } j,i\in\{0,\ldots,k-1\}} = a_j(m_i^\ell-m_j^\ell) \geq a_j((m_j+1)^\ell-m_j^\ell) = a_j\left(\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}m_j^{\ell-k}-m_j^\ell\right)$

  $n\geq 2k \Rightarrow \frac{n}{2}\geq k \Rightarrow n-k\geq n-\frac{n}{2}$

  $> a_j\,\ell\, m_j^{\ell-1} \geq \ell\,(a_j m_j^\ell)^{1/2} \geq \ell\,(n-k+1)^{1/2} \overset{\vee}{\geq} \ell\left(\frac{n}{2}+1\right)^{1/2} > n^{1/2}$,

  $\Rightarrow$ Widerspruch zu (I): $n>k^2$ ↯

  $\Rightarrow \quad a_i\neq a_j \quad \forall\, i\neq j$

(3) Wollen zeigen: a_i's sind genau die Zahlen $1,\ldots,k$ in einer gewissen Reihenfolge
(Nach Erdős: Herzstück des Beweises!)

Wissen: a_i's sind unterschiedlich. Also reicht es zu zeigen:

$$(zz) \quad a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \mid k!$$

Es gilt: $\binom{n}{k} = m^l \Rightarrow n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = m^l k!$ | Substituieren $n-j = a_j m_j^l$

$$\Rightarrow \quad a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} (m_0 m_1 \cdot \ldots \cdot m_{k-1})^l = k! \, m^l$$

Kürzen

$$\Rightarrow \quad a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} u^l = k! \, v^l \qquad \text{mit } ggT(u,v) = 1$$

Jetzt bleibt zu zeigen: $v = 1$ ($u=1$ folgt automatisch, da $a_0 \ldots a_{k-1}$ k Zahlen)

Falls $v > 1$ enthält v einen Primteiler $p \overset{ggT(u,v)=1}{\Longrightarrow} p \mid a_0 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \overset{(2)}{\Rightarrow} p \leq k$

Satz von Legendre: Die Zahl $n!$ enthält den Primfaktor p genau $r := \sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ Mal. ($\Rightarrow p^r \mid n!$)

- Schätzen Exponenten von p in dem Produkt $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ ab:

Sei $i \in \mathbb{N}$ und $b_1 < b_2 < \ldots < b_s \in \{n, \ldots, n-k+1\}$ die Vielfachen von p^i.

$\Rightarrow b_s = b_1 + (s-1)p^i \Rightarrow (s-1)p^i = b_s - b_1 \leq n - (n-k+1) = k-1$

$\Rightarrow \quad s \leq \lfloor \frac{k-1}{p^i} \rfloor + 1 \leq \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor + 1$

$\Rightarrow$ Für jedes i ist die Anzahl der Vielfachen von p^i unter $n, \ldots, n-k+1$

und daher auch unter den a_j's durch $\lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor + 1$ beschränkt

$\Rightarrow$ Exponent von p in $a_0 a_1 \cdots a_{k-1} \leq \sum_{i=1}^{l-1} \left(\lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor + 1 \right)$ | a_j hat keine echten Teile l-te Potenz.

(Summe endet bei $l-1$, da a_j's keine l-ten Potenzen erhalten)

$\Rightarrow$ Exponent von p in v^l kann also höchstens

$a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} u^l = k! \, v^l$: $\quad \sum_{i=1}^{l-1} \left(\lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor + 1 \right) - \underbrace{\sum_{i \geq 1} \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor}_{\text{Anzahl in } k! \text{ Legendre}} \leq l - 1 \quad \lightning$

$\Rightarrow$ Widerspruch: v^l ist l-te Potenz ($\Rightarrow$ Alle Exp. von Primf. $\geq l$)

$\Rightarrow \underline{v = 1} \Rightarrow a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} u^l = k! \overset{a_i \neq a_j}{\Longrightarrow}$ (k untersch. Zahlen, $\Rightarrow u \overset{!}{=} 1$) $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \{1, \ldots, k\}$ mit $a_i \neq a_j \; \forall i \neq j$.

Für $l = 2$ sind wir hier fertig: $\exists i : a_i = 4 = 2^2 = 2^l \quad \lightning$

a_i's dürfen keine l-ten Potenzen enthalten $\Rightarrow$ Satz für $l=2$ bew.

Ab hier $l \geq 3$:

(4) $k \geq 4 \Rightarrow \exists i_1, i_2, i_3 : a_{i_1} = 1,\ a_{i_2} = 2,\ a_{i_3} = 4$

$\Rightarrow n - i_1 = m_1^l,\ n - i_2 = 2m_2^l,\ n - i_3 = 4m_3^l$

Behaupten: $(n-i_2)^2 \neq (n-i_1)(n-i_3)$. $\Leftrightarrow (2m_2^l)^2 \neq (m_1^l)(4m_3^l)$

Andernfalls setzen $b = (n-i_2),\ n-i_1 = b-x,\ n-i_3 = b+y,\ 0 < |x|,|y| < k$

$\Rightarrow b^2 = (b-x)(b+y)$ oder $(y-x)b = xy$

$\Leftrightarrow b^2 = b^2 - bx + by - xy \Rightarrow xy = b(y-x)$

wobei $x = y$ unmöglich $(1): n > k^2 \Rightarrow n-k > k^2 - k > k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} |xy| = b|x-y| \geq b > n-k > (k-1)^2 \geq |xy|$ ↯

$\Rightarrow m_2^2 \neq m_1 m_3$ (o.B.d.A $m_2^2 > m_1 m_3$, anderer Fall analog)

Es gilt: $\underbrace{2(k-1)n}_{=2kn-2n} > \overbrace{n^2}^{\geq (n-i_2)^2} - \overbrace{(n-k+1)^2}^{< (n-i_1)(n-i_3)} > (n-i_2)^2 - (n-i_1)(n-i_3)$

$= 2nk - 2n - \underbrace{(k^2+1-2k)}_{>1,\ \text{da } k \geq 4}$

$= 4[m_2^{2l} - (m_1 m_3)^l] \underset{m_2^2 > m_1 m_3}{\geq} 4[(m_1 m_3 + 1)^l - (m_1 m_3)^l]$

$\geq 4 l\, m_1^{l-1} m_3^{l-1}$

Wegen $l \geq 3$ und $n \overset{(I)}{>} k^l \geq k^3 \overset{k \geq 4}{>} 6k$ ergibt dies:

$2(k-1)\, n m_1 m_3 > 4 l\, m_1^l m_3^l = l(n-i_1)(n-i_3)$

$> l(n-k+1)^2 > 3\left(n - \frac{n}{6}\right)^2 = 3n^2 - n^2 + \frac{n^2}{2} > 2n^2$ $(*)$

Mit $m_i \leq n^{1/l} \overset{l \geq 3}{\leq} n^{1/3}$ erhalten wir schließlich

$k n^{2/3} \geq k m_1 m_3 > (k-1) m_1 m_3 \overset{(*)}{>} n$

$\Rightarrow k^3 > n$

↯ Widerspruch zu (I) $n \geq p^l > k^l$ // $l \geq 3$

$\square$

Quellen: Das Buch der Beweise, M. Aigner, G. Ziegler: 3te Auflage

Vortrag von Lasse Kolb – Proseminar: Buch der Beweise