Zwei Ungleichungen und ihre Anwendung auf Graphen

Ein Lob der Ungleichungen

Max Ploner
(max.ploner@hu-berlin.de)

Ungleichung von Cauchy-Schwarz

Satz 1. *Sei $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ ein inneres Produkt auf einem reelle Vektorraum V (mit der Norm $|\mathbf{a}|^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$). Für alle Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ gilt:*

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$$

Die Gleichheit tritt ein, wenn $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig sind (dh. $\exists k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = k\mathbf{b}$).

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| && \text{Dreiecksungleichung} \\
& |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle \\
\Leftrightarrow \quad & = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\
& = |\mathbf{a}|^2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\mathbf{b}|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\
\Leftrightarrow \quad & |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2
\end{aligned}$$

Im Fall $\exists k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = k\mathbf{b}$ gilt:

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |k\mathbf{a}| = |\mathbf{a}| + |k||\mathbf{a}| = (|k| + 1)|\mathbf{a}| = |\mathbf{a} + |k|\mathbf{a}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$$

Aus $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ folgt $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ und damit die lineare Abhängigkeit zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. $\square$

Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel

Satz 2. *Seien $a_1, \ldots a_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}}_{\textit{harmonisches Mittel}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}_{\textit{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}_{\textit{arithmetisches Mittel}}$$

Die Gleichheit tritt in beiden Fällen genau dann ein, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Beweis (1). Beweis per Induktion über die Anzahl der Elemente n:

Induktionsvoraussetzung:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n$$

Induktionsanfang: Der Induktionsanfang mit $n = 1$ ist trivial $(a = (a/1)^1)$. Da wir für den nächsten Beweis noch den Fall $n = 2$ voraussetzen werden, wählen wir dies als Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} & & 0 \leq (a_1 - a_2)^2 &= a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \\ \Leftrightarrow & & 4a_1a_2 &\leq a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 + a_2)^2 \\ \Leftrightarrow & & a_1a_2 &\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Induktionsschritt ($n \to (n+1)$):

Für alle reelle Zahlen $x \geq -1$ und natürliche Zahlen $n \geq 0$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{Bernoullische Ungleichung}$$

Also gilt auch:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\frac{a_1+\dots+a_n+a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_1+\dots+a_n}{n}}\right)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)\left(\frac{\frac{a_1+\dots+a_n+a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_1+\dots+a_n}{n}} - 1\right) \\ &= 1 + n\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{a_1 + \dots + a_n}\right) - (n+1) \\ &= n\frac{a_{n+1}}{a_1 + \dots + a_n} \\ &= a_{n+1}\frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} &\geq a_{n+1}\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n && \cdot \left(\tfrac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)^{n+1} \\ &\geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} && \text{Induktionsvoraussetzung} \end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung für das geometrische und das arithmetische Mittel bewiesen. Die Ungleichung für das harmonische Mittel ergibt sich aus dem Einsetzen von $a_i = \frac{1}{\tilde{a}_i}$ dem Bilden des Kehrbruchs. □

Beweis (2). Ein zweiter Beweis, der im BUCH Cauchy zugeschrieben wird, verwendet Induktion mit der gleichen Induktionsannahme, aber einem etwas ausgefallenerem Induktionsschritt: anstatt vom Fall n auf den Fall $n + 1$ zu schließen, wir (1.) bewiesen, dass aus der Annahme für n auch die $n - 1$ folgt, und (2.), dass aus der Annahme für n und 2 (bequemerweise auch unser Induktionsstart) die Aussage für $2n$ folgt. Der Induktionsanfang bleibt gleich.

Induktionsschritt ($n \to n - 1$): Sei $A := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$ das letzte einer Folge von n Elementen (für die die Induktionsvoraussetzung gilt), dann:

$$
\begin{aligned}
a_1 a_2 \dots a_{n-1} A &\leq \left(\frac{a_1 + \dots a_{n-1} + A}{n}\right)^n && \text{Induktionsannahme} \\
&= \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n \\
\Rightarrow \qquad a_1 a_2 \dots a_{n-1} &\leq A^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{a_1 + \dots a_{n-1}}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt $(2, n \to 2n)$:

$$
\begin{aligned}
a_1 a_2 \dots a_{2n} &= (a_1 a_2 \dots a_n)(a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}) \\
&\leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n \left(\frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}\right)^n && \text{Induktionsannahme} \\
&= \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}\right)^n \\
&\leq \left(\frac{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}{2}\right)^{2n} && \text{Induktionsannahme für } n = 2 \\
&= \left(\frac{a_1 + \dots + a_{2n}}{2n}\right)^{2n}
\end{aligned}
$$

□

Die Richtung "⇐" (aus gleichen Elementen folgen gleiche Mittel) ist trivial, die Rückrichtung "⇒" erfordert jedoch noch einen kurzen Beweis.

Beweis: Mittel gleich ⇒ Elemente gleich. Leicht lässt sich dies über das harmonische und arithmetische Mittel zeigen

$$
\begin{aligned}
& & \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots \frac{1}{a_n}} &= \frac{a_1 + \dots a_2}{n} && \text{Vorraussetzung} \\
&\Rightarrow & n^2 &= \left(\frac{1}{a_1} + \dots \frac{1}{a_n}\right)(a_1 + \dots a_2) \\
& & &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} \\
& & &= n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \leq j < i}^{n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) \\
& & &\geq n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \leq j < i}^{n} 2 && 0 \leq (a-b)^2 \\
& & & && \Rightarrow 2ba \leq a^2 + b^2 \\
& & &= n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 && \Rightarrow \quad 2 \leq \tfrac{a}{b} + \tfrac{b}{a} \\
&\Rightarrow & \forall_{i,j} : \quad & \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) = 2 \\
&\Rightarrow & \forall_{i,j} : \quad & a_i = a_j
\end{aligned}
$$

□

Anwendung auf Graphen

Satz 3. *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $n = |V|$ Ecken ohne Dreiecke. Dann gilt:*

$$|E| \leq \frac{n^2}{4}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn n gerade und G der vollständige bipartite Graph $K_{n/2,n/2}$ ist.

Beweis per Cauchy-Schwarz

Beweis. Sei d_i jeweils der Grad der Ecke i. Sei außerdem $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ und $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt, so gilt:

$$\begin{aligned}
n|E| &\geq \sum_{(i,j)\in E} (d_i + d_j) && (i,j) \in V \Rightarrow d_i + d_j \leq n, \text{ da keine Dreiecke in } G \\
&= \sum_{i \in V} d_i^2 && i \text{ hat } d_i \text{ Kanten} \\
&= \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle \\
&= |\mathbf{d}|^2 \cdot \frac{|\mathbf{1}|}{n} && |\mathbf{1}| = n \\
&\geq \frac{\langle \mathbf{d}, \mathbf{1} \rangle^2}{n} && \text{Cauchy-Schwarz} \\
&= \frac{\left(\sum_{i\in V} d_i\right)^2}{n} \\
&= \frac{4|E|^2}{n} && \textstyle\sum_{i\in V} d_i = 2|E|
\end{aligned}$$

Falls hier Gleichheit vorliegt, muss (wg. Cauchy-Schwarz) für alle i und j gelten: $d_i = d_j$ und $d_i + d_j = n$. Da G außerdem dreiecksfrei ist, ist $G = K_{n/2,n/2}$ der einzig mögliche Graph. □

Beweis per Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel

Beweis. Sei α die maximale Größe einer unabhängigen Menge A (dh. es gibt keine Kanten zwischen Knoten in A). Da der Graph nach Voraussetzung dreiecksfrei ist, bilden die Nachbarn jedes Knotens jeweils eine unabhängige Menge. Also gilt $d_i \leq \alpha$ für alle Knoten i.

Seien nun außerdem noch $B = V \backslash A$ mit der Größe $\beta = n - \alpha$.

$$
\begin{aligned}
|E| &\leq \sum_{i \in B} d_i && \text{Da } A \text{ unabhängig, hat jede Kante einen Knoten in } B \\
&\leq \alpha\beta && d_i \leq \alpha \text{ für alle } i \\
&\leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 && \text{Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel} \\
&= \frac{n^2}{4}
\end{aligned}
$$

Im Fall von $|E| = \frac{n^2}{4}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& |E| = \frac{n^2}{4} \geq \alpha\beta \geq \sum_{i \in B} d_i \geq |E| \\
\Rightarrow \quad & \frac{n^2}{4} = \alpha(n-\alpha) = n\alpha - \alpha^2 \\
\Rightarrow \quad & 0 = \frac{n^2}{4} - n\alpha + \alpha^2 = \left(\frac{n}{2} - \alpha\right)^2 \\
\Rightarrow \quad & \alpha = \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

Folglich muss wegen $\sum_{i \in B} d_i = \alpha\beta$ und $d_i \leq \alpha$ für alle i gelten $d_i = \alpha = \frac{n}{2}$. Damit ist $G = K_{n/2,n/2}$ wieder der einzig mögliche Graph, der diese Bedingungen erfüllt. $\square$

Referenz

M. Aigner & G. M. Ziegler: Ein Lob der Ungleichungen - *Das BUCH der Beweise* (Springer-Verlag)

In der 3. Auflage (2010): Kapitel 18 (S. 139 - 146).
In der 4. & 5. Auflage (2015 & 2018): Kapitel 20 (S. 159-166 & S.163-170).