Satz von Sperner

Mächtigkeit von Antiketten

Malte Lundschien

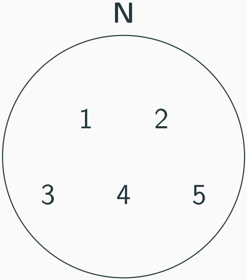
Berlin, 14.12.2017

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

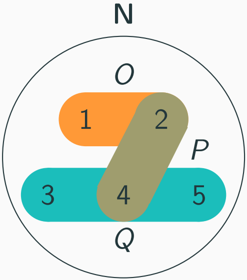
Inhaltsübersicht

Grundlagen

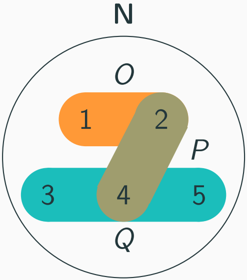
Grundlagen - Antiketten



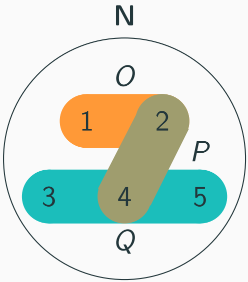
Grundlagen - Antiketten



Grundlagen - Antiketten



$\Rightarrow \mathcal{F} := \{O, P, Q\}$ ist eine Antikette.



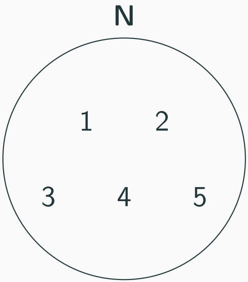
$\Rightarrow \mathcal{F} := \{O, P, Q\}$ ist eine Antikette.

Antikette

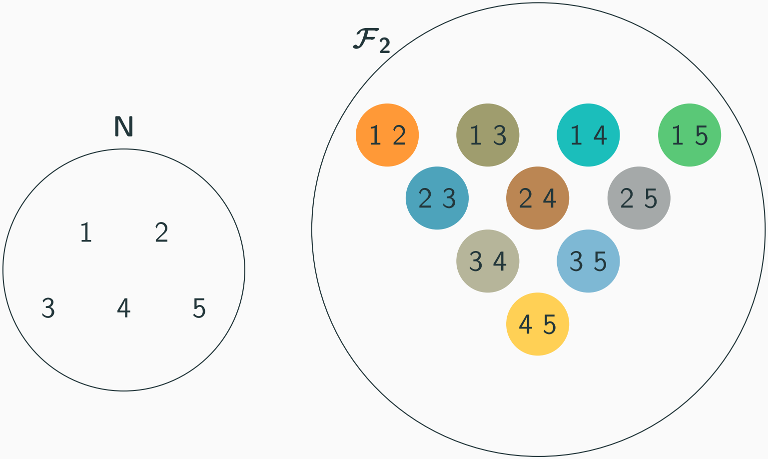
Sei $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine n-Menge und $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von N. Dann heißt $\mathcal{F}$ Antikette von N, falls:

$$\forall A, B \in \mathcal{F} : A \not\subseteq B, B \not\subseteq A$$

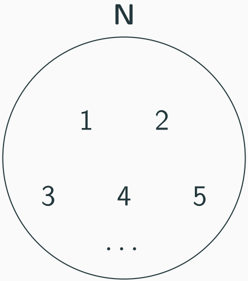
Wie groß kann so eine Antikette maximal sein?



Wie groß kann so eine Antikette maximal sein?

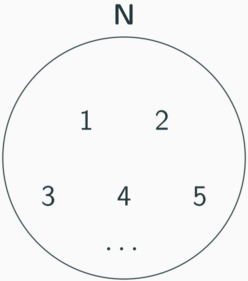


Wie groß kann so eine Antikette maximal sein?



Betrachte die Familien $\mathcal{F}_k$ bestehend aus den Teilmengen der Mächtigkeit k.

Wie groß kann so eine Antikette maximal sein?

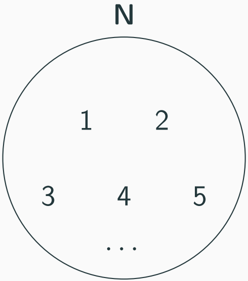


Betrachte die Familien $\mathcal{F}_k$ bestehend aus den Teilmengen der Mächtigkeit k.

$$|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Grundlagen - Mächtigkeit von Antiketten

Wie groß kann so eine Antikette maximal sein?



Betrachte die Familien $\mathcal{F}_k$ bestehend aus den Teilmengen der Mächtigkeit k.

$$|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$max_k|\mathcal{F}_k| = max_k\binom{n}{k} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Satz von Sperner

Satz von Sperner

Emanuel Sperner [1]

- dt. Mathematiker *1905 †1980 [2]
- 1928 Satz von Sperner, Spernersches Lemma

Satz von Sperner

Emanuel Sperner [1]

- dt. Mathematiker *1905 †1980 [2]
- 1928 Satz von Sperner, Spernersches Lemma

Satz von Sperner

DIe Mächtigkeit einer größten Antikette von Teilmengen einer n-Menge ist $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Beweis

Beweis

Beweis nach David Lubell:

1. **Ausschöpfende Ketten von Mengen**
2. **Wie viele verschiedene solcher Ketten gibt es?**
3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**
4. **Zusammenführung**

Beweis

Sei $\mathcal{F}$ eine beliebige Antikette von $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

1. **Ausschöpfende Ketten von Mengen**

Betrachten Ketten $\mathcal{C}$ von Teilmengen von N mit:

$$\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = N \qquad \text{, wobei } |C_i| = i \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n$$

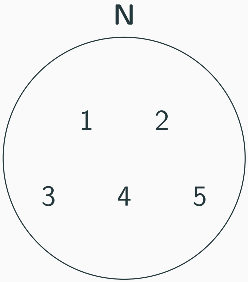
Beweis

Sei $\mathcal{F}$ eine beliebige Antikette von $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

1. **Ausschöpfende Ketten von Mengen**

Betrachten Ketten $\mathcal{C}$ von Teilmengen von N mit:

$\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = N$, wobei $|C_i| = i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$



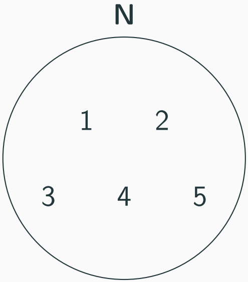
Beweis

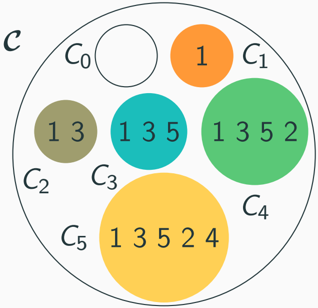
Sei $\mathcal{F}$ eine beliebige Antikette von $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

1. **Ausschöpfende Ketten von Mengen**

Betrachten Ketten $\mathcal{C}$ von Teilmengen von N mit:

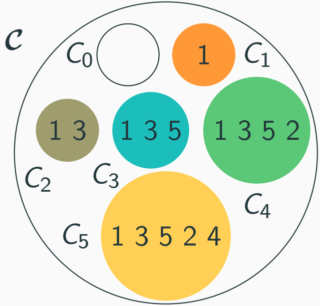
$\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = N$, wobei $|C_i| = i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$



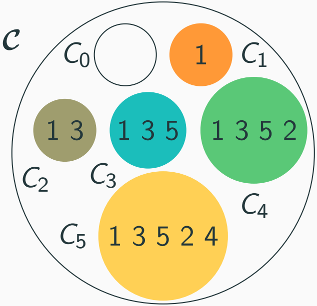


Beweis

2. **Wie viele verschiedene solcher Ketten gibt es?**



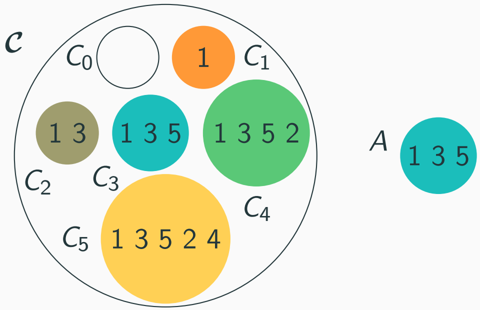
2. **Wie viele verschiedene solcher Ketten gibt es?**



Ziehen aus N ohne zurücklegen

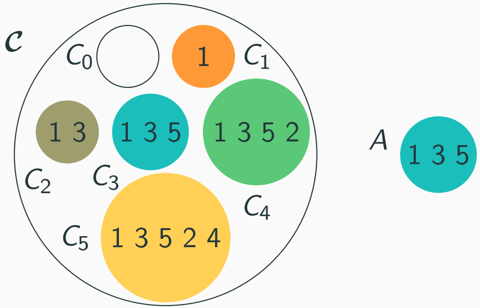
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{n!}$ Ketten

3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**



Beweis

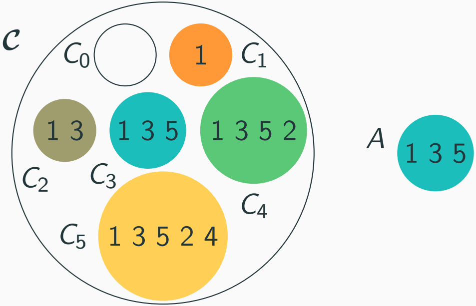
3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**



(a) Elemente von A hinzufügen $\Rightarrow k!$ Möglichkeiten

Beweis

3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**



   (a) Elemente von A hinzufügen $\Rightarrow k!$ Möglichkeiten

   (b) restliche Elemente von N hinzufügen $\Rightarrow (n-k)!$ Mögl.

Beweis

3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**
   (a) Elemente von A hinzufügen $\Rightarrow k!$ Möglichkeiten
   (b) restliche Elemente von N hinzufügen $\Rightarrow (n-k)!$ Mögl.

$$\Rightarrow \boldsymbol{k!(n-k)!} \text{ Ketten enthalten } A$$

Beweis

3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**
   (a) Elemente von A hinzufügen $\Rightarrow k!$ Möglichkeiten
   (b) restliche Elemente von N hinzufügen $\Rightarrow (n-k)!$ Mögl.

   $$\Rightarrow \boldsymbol{k!(n-k)!} \text{ Ketten enthalten } A$$

   (c) $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A, B \in \mathcal{C}$

3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**
   (a) Elemente von A hinzufügen $\Rightarrow k!$ Möglichkeiten
   (b) restliche Elemente von N hinzufügen $\Rightarrow (n-k)!$ Mögl.

$$\Rightarrow \boldsymbol{k!(n-k)!} \text{ Ketten enthalten } A$$

   (c) $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A, B \in \mathcal{C} \;\; \Rightarrow A \subset B \vee B \subset A$

3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**
   (a) Elemente von A hinzufügen $\Rightarrow k!$ Möglichkeiten
   (b) restliche Elemente von N hinzufügen $\Rightarrow (n-k)!$ Mögl.

$$\Rightarrow \boldsymbol{k!(n-k)!} \text{ Ketten enthalten } A$$

(c) $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A, B \in \mathcal{C} \;\; \Rightarrow A \subset B \vee B \subset A \lightning \mathcal{F}$ Antikette

Beweis

3. **Wie viele Ketten enthalten ein gegebenes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{F}$?**
   (a) Elemente von A hinzufügen $\Rightarrow k!$ Möglichkeiten
   (b) restliche Elemente von N hinzufügen $\Rightarrow (n-k)!$ Mögl.

$$\Rightarrow \boldsymbol{k!(n-k)!} \text{ Ketten enthalten } A$$

   (c) $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A, B \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow A \subset B \vee B \subset A$ ↯ $\mathcal{F}$ Antikette
   $\Rightarrow A, B \notin \mathcal{C}$

Beweis - Zusammenführung

2. **Wie viele verschiedene solcher Ketten gibt es?**
   $n!$ Ketten
3. **Wie viele Ketten enthalten gegebenes $A \in \mathcal{F}$?**
   $k!(n-k)!$ Ketten; $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A, B \notin \mathcal{C}$

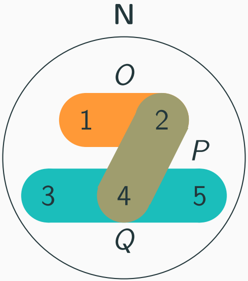
Beweis - Zusammenführung

2. **Wie viele verschiedene solcher Ketten gibt es?**
   $n!$ Ketten
3. **Wie viele Ketten enthalten gegebenes $A \in \mathcal{F}$?**
   $k!(n-k)!$ Ketten; $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A, B \notin \mathcal{C}$
4. **Zusammenführung**
   m_k: Anzahl der k-Teilmengen in $\mathcal{F}$
   $\Rightarrow |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k$

Beweis - Zusammenführung

2. **Wie viele verschiedene solcher Ketten gibt es?**
   $n!$ Ketten
3. **Wie viele Ketten enthalten gegebenes $A \in \mathcal{F}$?**
   $k!(n-k)!$ Ketten; $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A, B \notin \mathcal{C}$
4. **Zusammenführung**

m_k: Anzahl der k-Teilmengen in $\mathcal{F}$
$\Rightarrow |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k$



Beweis - Zusammenführung

2. **Wie viele verschiedene solcher Ketten gibt es?**
   $n!$ Ketten
3. **Wie viele Ketten enthalten gegebenes $A \in \mathcal{F}$?**
   $k!(n-k)!$ Ketten; $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A, B \notin \mathcal{C}$
4. **Zusammenführung**
   m_k: Anzahl der k-Teilmengen in $\mathcal{F}$
   $\Rightarrow |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k$

Anzahl der Ketten, die ein beliebiges $A \in \mathcal{F}$ enthalten:

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} (m_k \cdot k!(n-k)!)}$$

Beweis - Zusammenführung

2. **Wie viele verschiedene solcher Ketten gibt es?**
   $n!$ Ketten
3. **Wie viele Ketten enthalten gegebenes $A \in \mathcal{F}$?**
   $k!(n-k)!$ Ketten; $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A, B \notin \mathcal{C}$
4. **Zusammenführung**
   m_k: Anzahl der k-Teilmengen in $\mathcal{F}$
   $\Rightarrow |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k$

Anzahl der Ketten, die ein beliebiges $A \in \mathcal{F}$ enthalten:

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} (m_k \cdot k!(n-k)!) \leq n!}$$

Beweis - Zusammenführung

$$\sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot k!(n-k)!\right) \leq n!$$

Beweis - Zusammenführung

$$\sum_{k=0}^{n} (m_k \cdot k!(n-k)!) \leq n!$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \right) \leq 1$$

Beweis - Zusammenführung

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot k!(n-k)!\right) &\leq n! \\
\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!}\right) &\leq 1 \\
\Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}}\right) &\leq 1
\end{aligned}
$$

Beweis - Zusammenführung

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot k!(n-k)! \right) \leq n! \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \right) \leq 1 \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}} \right) \leq 1 \\
\Rightarrow & \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \cdot \sum_{k=0}^{n} m_k \leq 1
\end{aligned}
$$

Beweis - Zusammenführung

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} (m_k \cdot k!(n-k)!) \leq n! \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \right) \leq 1 \\
\Leftrightarrow & \quad \sum_{k=0}^{n} \left(m_k \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}} \right) \leq 1 \\
\Rightarrow & \quad \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \cdot \sum_{k=0}^{n} m_k \leq 1 \\
\Leftrightarrow & \quad |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Satz von Erdös-Ko-Rado

Satz von Erdös-Ko-Rado - Grundlagen

Satz von Erdös-Ko-Rado - Grundlagen

$\Rightarrow \mathcal{F} := \{O, P, Q\}$ ist eine 2-Schnittfamilie.

Satz von Erdös-Ko-Rado - Grundlagen

$\Rightarrow \mathcal{F} := \{O, P, Q\}$ ist eine 2-Schnittfamilie.

Schnittfamilie

Sei $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine n-Menge und $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von N. Dann heißt $\mathcal{F}$ Schnittfamilie von N, falls:

$$\forall A, B \in \mathcal{F} : |A \cap B| \geq 1$$

Satz von Erdös-Ko-Rado - Grundlagen

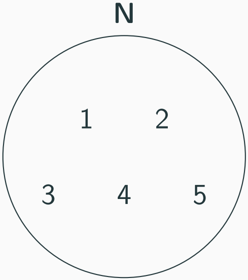
$\Rightarrow \mathcal{F} := \{O, P, Q\}$ ist eine 2-Schnittfamilie.

k-Schnittfamilie

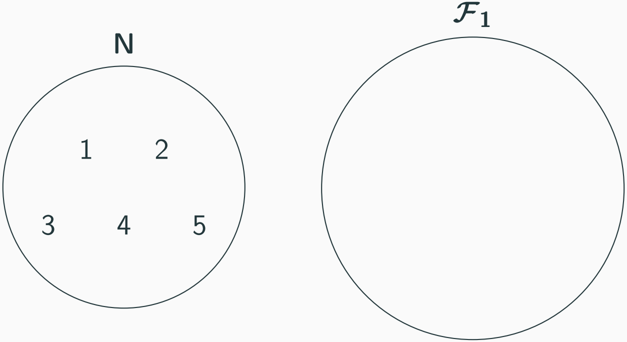
Sei $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine n-Menge und $\mathcal{F}$ eine Familie von **k-Teilmengen** von N. Dann heißt $\mathcal{F}$ k-Schnittfamilie von N, falls:

$$\forall A, B \in \mathcal{F} : |A \cap B| \geq 1$$

Wie groß kann so eine k-Schnittfamilie maximal sein?

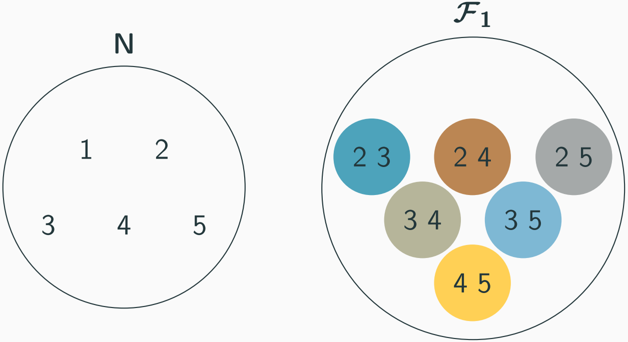


Wie groß kann so eine k-Schnittfamilie maximal sein?



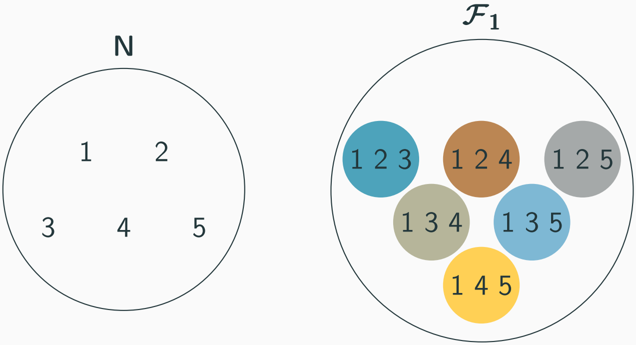
Satz von Erdös-Ko-Rado - Mächtigkeit von k-Schnittfamilien

Wie groß kann so eine k-Schnittfamilie maximal sein?



Satz von Erdös-Ko-Rado - Mächtigkeit von k-Schnittfamilien

Wie groß kann so eine k-Schnittfamilie maximal sein?



$$\Rightarrow |\mathcal{F}_1| = \binom{n-1}{k-1}$$

Satz von Erdös-Ko-Rado

Die größte Mächtigkeit einer k-Schnittfamilie in einer n-Menge ist $\binom{n-1}{k-1}$, für $n \geq 2k$.

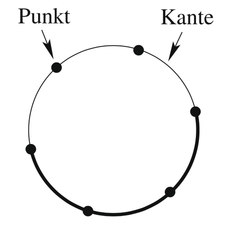
Beweis

Beweis nach Gyula Katona:

Betrachten Kreis C mit n Punkten und Kanten

.

Bogen der Länge $\boldsymbol{k}$: $k+1$ aufeinander folgenden Punkten und k Kanten



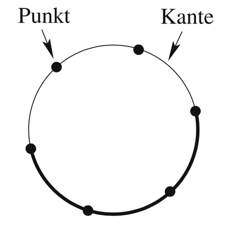
Kreis C für $n = 6$

Beweis nach Gyula Katona:

Betrachten Kreis C mit n Punkten und Kanten

.

Bogen der Länge $\boldsymbol{k}$: $k+1$ aufeinander folgenden Punkten und k Kanten



Kreis C für $n = 6$

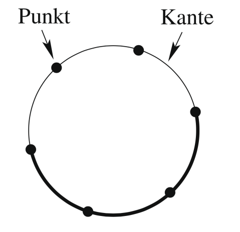
Lemma

Sei $n \geq 2k$, und seien die t verschiedenen Bögen $A_1, ..., A_t$ der Länge k gegeben, so dass je zwei Bögen eine Kante gemeinsam haben. Dann gilt $t \leq k$.

Beweis - Lemma

z.z. $t \leq k$

- A_i und A_j haben keinen gemeinsamen Endpunkt



Kreis C für $n = 6$

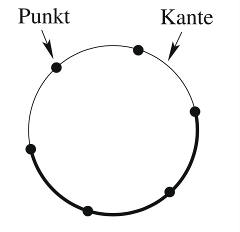
Beweis - Lemma

z.z. $t \leq k$

- A_i und A_j haben keinen gemeinsamen Endpunkt

Betrachte A_1:

- jeder Bogen $A_i (i \geq 2)$ hat gemeinsame Kante mit A_1



Kreis C für $n = 6$

Beweis - Lemma

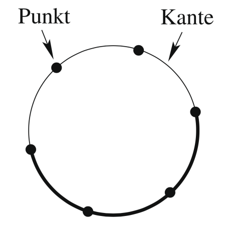
z.z. $t \leq k$

- A_i und A_j haben keinen gemeinsamen Endpunkt

Betrachte A_1:

- jeder Bogen $A_i (i \geq 2)$ hat gemeinsame Kante mit A_1

$\Rightarrow$Endpunkt von A_i ist innerer Punkt von A_1



Kreis C für $n = 6$

Beweis - Lemma

z.z. $t \leq k$

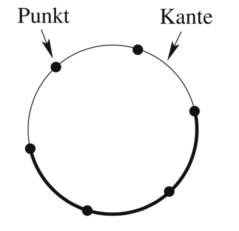
- A_i und A_j haben keinen gemeinsamen Endpunkt

Betrachte A_1:

- jeder Bogen $A_i (i \geq 2)$ hat gemeinsame Kante mit A_1

$\Rightarrow$Endpunkt von A_i ist innerer Punkt von A_1

$\Rightarrow$max. $k-1$ weitere Bögen



Kreis C für $n = 6$

Beweis - Lemma

z.z. $t \leq k$

- A_i und A_j haben keinen gemeinsamen Endpunkt

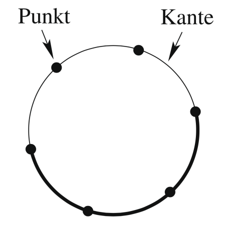
Betrachte A_1:

- jeder Bogen $A_i (i \geq 2)$ hat gemeinsame Kante mit A_1

$\Rightarrow$Endpunkt von A_i ist innerer Punkt von A_1

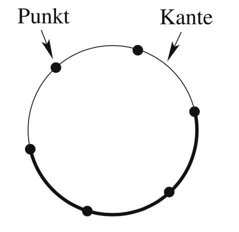
$\Rightarrow$max. $k-1$ weitere Bögen

$\Rightarrow t \leq k$ $\square$



Kreis C für $n = 6$

Sei $\mathcal{F}$ eine k-Schnittfamilie, C ein Kreis mit n Punkten & Kanten.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

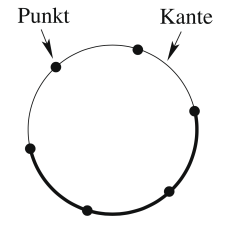


Kreis C für $n = 6$

Beweis - Erdös-Ko-Rado

Sei $\mathcal{F}$ eine k-Schnittfamilie, C ein Kreis mit n Punkten & Kanten.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

- schreiben zyklische Permutation $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von N im Uhrzeigersinn an Kanten von C

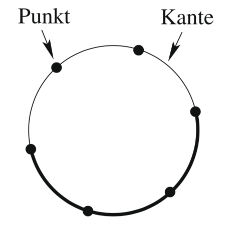


Kreis C für $n = 6$

Beweis - Erdös-Ko-Rado

Sei $\mathcal{F}$ eine k-Schnittfamilie, C ein Kreis mit n Punkten & Kanten.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

- schreiben zyklische Permutation $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von N im Uhrzeigersinn an Kanten von C
- $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{F} | \text{Elemente von } A \text{ aufeinanderfolgend in } C\}$



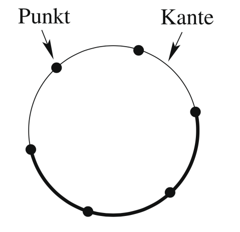
Kreis C für $n = 6$

Beweis - Erdös-Ko-Rado

Sei $\mathcal{F}$ eine k-Schnittfamilie, C ein Kreis mit n Punkten & Kanten.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

- schreiben zyklische Permutation $\pi = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ von N im Uhrzeigersinn an Kanten von C
- $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{F} | \text{Elemente von } A \text{ aufeinanderfolgend in } C\}$

$$\overset{Lemma+}{\underset{\mathcal{F}\ k-Schnittfamilie}{\Longrightarrow}} \quad |\mathcal{A}| \leq k$$

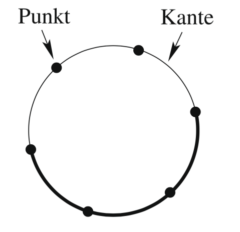


Kreis C für $n = 6$

Sei $\mathcal{F}$ eine k-Schnittfamilie, C ein Kreis mit n Punkten & Kanten.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

- schreiben zyklische Permutation $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von N im Uhrzeigersinn an Kanten von C
- $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{F} | \text{Elemente von } A \text{ aufeinanderfolgend in } C\}$

$$\Longrightarrow_{\mathcal{F}\ k-Schnittfamilie}^{Lemma+} \quad |\mathcal{A}| \leq k$$
$$\Longrightarrow^{(n-1)!\text{ zykl. Perm.}} \quad |\mathcal{F}| \leq k(n-1)!$$



Kreis C für $n = 6$

Beweis - Erdös-Ko-Rado

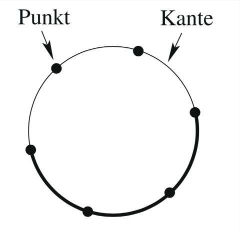
Sei $\mathcal{F}$ eine k-Schnittfamilie, C ein Kreis mit n Punkten & Kanten.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

- schreiben zyklische Permutation $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von N im Uhrzeigersinn an Kanten von C
- $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{F} | \text{Elemente von } A \text{ aufeinanderfolgend in } C\}$

$$\xRightarrow[\mathcal{F}\ k-\text{Schnittfamilie}]{\text{Lemma}+} \quad |\mathcal{A}| \leq k$$

$$\xRightarrow{(n-1)!\text{ zykl. Perm.}} \quad |\mathcal{F}| \leq k(n-1)!$$

$$\xRightarrow[A\text{ aufzuzählen}]{k!(n-k)!\text{Mögl.}} \quad |\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}$$



Kreis C für $n = 6$

Beweis - Erdös-Ko-Rado

Sei $\mathcal{F}$ eine k-Schnittfamilie, C ein Kreis mit n Punkten & Kanten.
z.z. $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

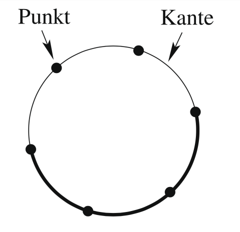
- schreiben zyklische Permutation $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von N im Uhrzeigersinn an Kanten von C
- $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{F} | \text{Elemente von } A \text{ aufeinanderfolgend in } C\}$

$$\Longrightarrow_{\substack{Lemma+\\ \mathcal{F}\ k-Schnittfamilie}} \quad |\mathcal{A}| \leq k$$

$$\Longrightarrow^{(n-1)!\text{ zykl. Perm.}} \quad |\mathcal{F}| \leq k(n-1)!$$

$$\Longrightarrow_{\substack{k!(n-k)!\text{Mögl.}\\ A \text{ aufzuzählen}}} \quad |\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}$$

$$\Leftrightarrow |\mathcal{F}| \leq \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} \quad \square$$



Kreis C für $n = 6$

Quellen

Quellen

Martin Aigner.
***Das Buch der Beweise / Martin Aigner ; Günter M. Ziegler*.**
Springer Spektrum, Berlin [u.a.], 4. aufl. edition, 2015.

Emanuel sperner.
`https://de.wikipedia.org/wiki/Emanuel_Sperner`.
Zuletzt aufgerufen: 12.12.2017.