

# Das Problem der Museumswächter

Laura Wartschinski

November 15, 2015

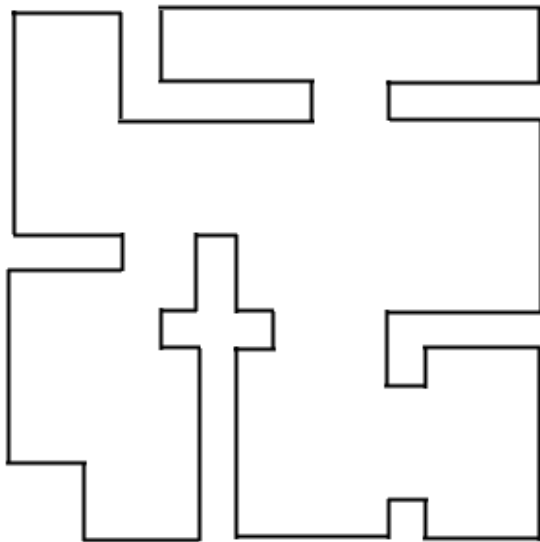
# Definition

*Gegeben sei eine polygonale Fläche  $G$  mit Rand  $\partial G$ , interpretiert als Grundriss eines Museums. Wähle nun möglichst wenige Punkte  $p_1, p_2 \dots p_k$  (Wächter) im Innern des Polygons, sodass jeder Punkt im Innern des Polygons durch eine Gerade, die ganz in  $G$  einschliesslich Rand liegt, mit einem Wächter verbunden werden kann.*

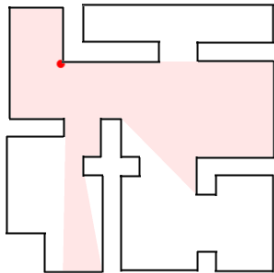
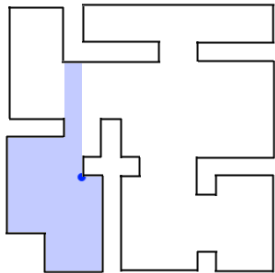
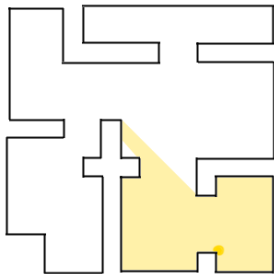
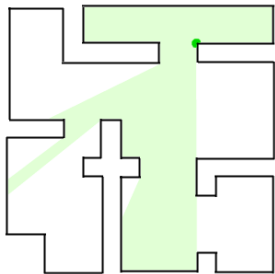
# Problembeschreibung

- ▶ Museum: ebenes Polygon mit  $n$  Seiten
- ▶ Wächter sollen so auf festen Punkten platziert werden, dass sie das ganze Museum im Blick haben
- ▶ Wächter dürfen sich drehen, aber sich nicht bewegen
- ▶ Für eine gewisse Anzahl Seiten und ein beliebig verwinkeltes Gebäude, wie viele Wächter braucht man mindestens?

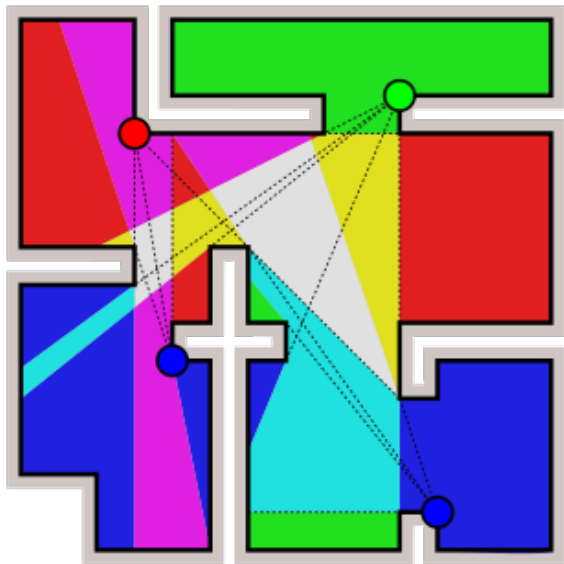
# Beispiel



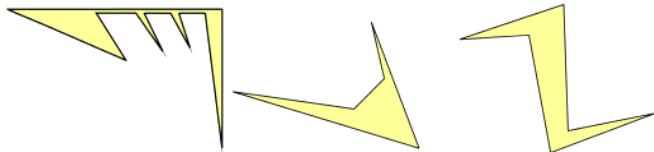
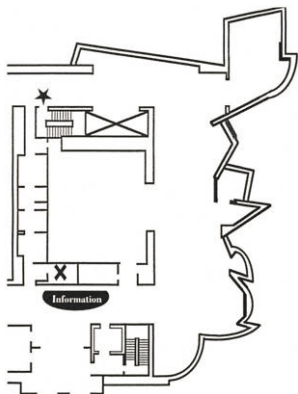
# Beispiel



# Beispiel

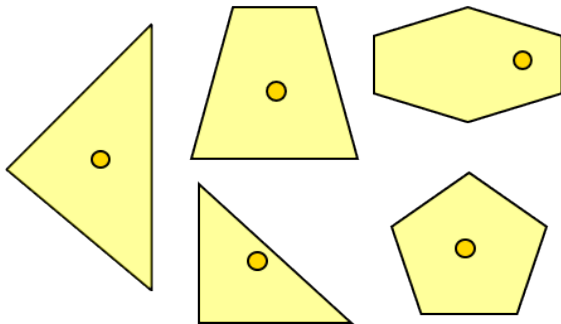


# Verrückte Galerien



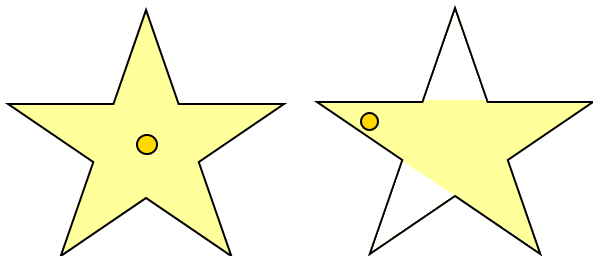
# Einfache Beispiele

- ▶ Was haben diese Räume gemeinsam?



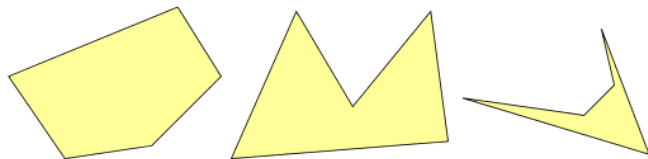


# Konkave Räume

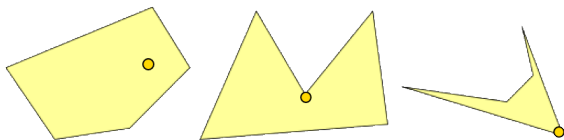


- ▶ Wenn das Polygon konvex ist, dann reicht natürlich ein Wächter aus. Den Wächter kann man dann sogar an jeden Punkt des Museums postieren.
- ▶ Für teilweise konkave Museumsgrundrisse ist das Problem jedoch schwieriger.
- ▶ Dreiecke und Vierecke sind stets konvex - hier reicht also stets ein einziger Wächter.

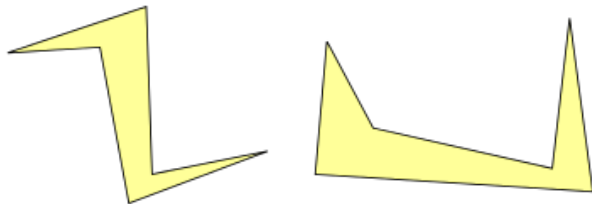
# Fünfecke



- ▶ Jedes Fünfeck hat entweder 0, 1 oder 2 konkave Ecken
- ▶ Auch hier reicht noch ein einziger Wächter:

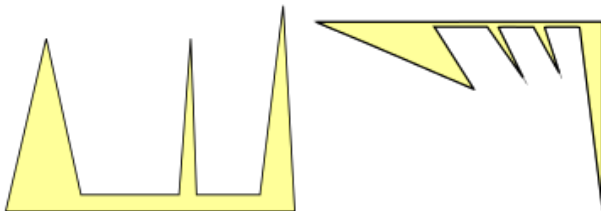


# Sechsecke



- ▶ Sechseckige Museumsräume lassen sich nicht mehr von einem Wächter bewachen
- ▶ Es reichen jedoch stets zwei Wächter

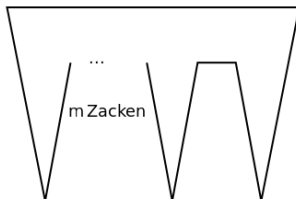
# Neunecke



- ▶ Für neuneckige Räume, die maximal unglücklich verwinkelt sind (sog. kritische Polygone), benötigt man mindestens 3 Wächter.

# Allgemeine Überlegungen

- ▶ Für jeweils drei Wände kommt ein weiterer minimal notwendiger Wächter hinzu
- ▶ Die Spitzen der Zacken können nicht von dem gleichen Wächter beobachtet werden
- ▶ Im schlimmsten Fall gibt es  $n$  Zacken
- ▶ Ein Museum mit  $n = 3m$  Wänden braucht stets  $m$  Wächter.

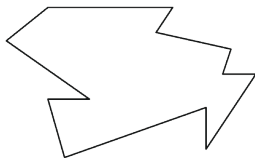


# Beweis

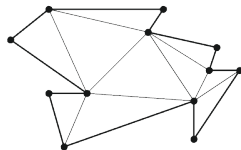
- ▶ Ein Wächter sieht einen Punkt des Museums, wenn keine Wand im Weg steht
- ▶ Anders ausgedrückt: wenn es eine gerade (Sicht-)Linie zwischen dem Wächter und dem Punkt gibt
- ▶ Konvexe Regionen können von einem Wächter komplett eingesehen werden
- ▶ Wir müssen also das Museum in möglichst wenige Regionen einteilen, die jeweils von einem Wächter überblickt werden können
- ▶ Jedes Polygon kann in Dreiecke aufgeteilt werden, und Dreiecke sind immer konvex.

# Beweis

- ▶ Triangulierung: verwende  $n-3$  sich nicht kreuzende Diagonalen, um den Innenraum in Dreiecke zu teilen
- ▶ Füge dabei keine Ecken hinzu



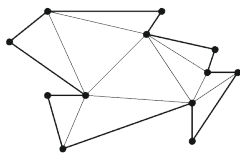
Ein Museum mit 12 Wänden



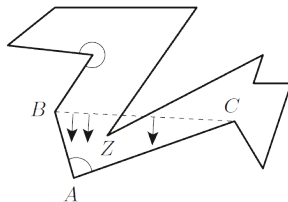
Eine Triangulierung des Museums

# Beweis

- ▶ Lässt sich eine solche Triangulierung immer finden?
- ▶ Ja! Beweis: Induktion über Anzahl  $n$  der Ecken
- ▶ (Induktionsanfang)  $n = 3$ : Dreieck, nichts zu zeigen
- ▶ (Induktionsschritt) Hinzufügen einer Ecke (A):
- ▶ Betrachte Nachbarerecken (B und C)
- ▶ Wenn BC im Inneren des Polygons liegt, ist es unsere Diagonale
- ▶ Falls nicht, verschieben wir die Strecke in Richtung A bis zur letzten Ecke des Polygons (Z), und AZ ist die neue Diagonale.



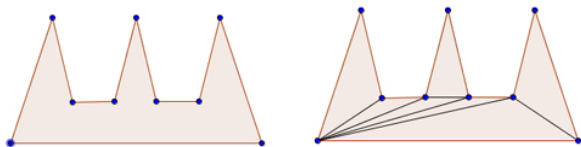
Eine Triangulierung des Museums





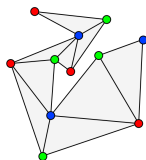
# Beweis

- ▶ Interpretiere die Triangulierung als Graph
- ▶ Wände und Diagonalen sind Kanten
- ▶ Vorherige Ecken des Museums sind Knoten

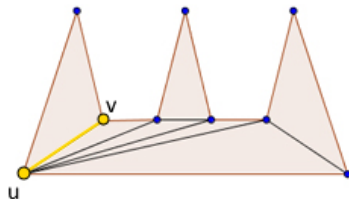


# Beweis

- ▶ Dieser Graph ist immer 3-Färbbar!

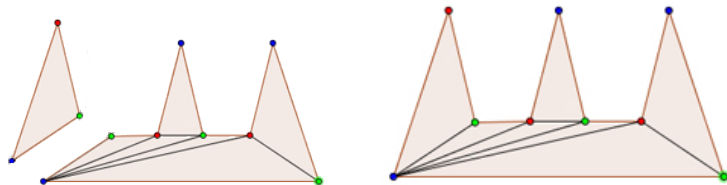


- ▶ Beweis per Induktion. Für  $n=3$  ist nichts zu zeigen.
- ▶  $n \geq 3$ : Wähle zwei beliebige Ecken  $u$  und  $v$ , die durch eine Diagonale verbunden sind.



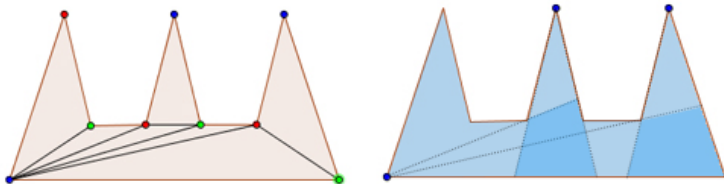
# Beweis

- ▶ zerlegt Graph in zwei Teile, die jeweils UV enthalten. Nach Induktionsannahme können beide Teile mit drei Farben gefärbt werden.
- ▶ o.B.d.A. können wir annehmen, dass die beiden Eckpunkte in beiden Teilgraphen die gleichen Farben haben
- ▶ Nun "kleben" wir den Graphen zusammen



# Beweis

- ▶ Insgesamt gibt es  $n$  Ecken
- ▶ Diese sind mit 3 Farben gefärbt
- ▶ Eine der Farbklassen enthält also nicht mehr als  $\lfloor n/3 \rfloor$  Ecken
- ▶ jedes Dreieck enthält eine Ecke jeder Farbe



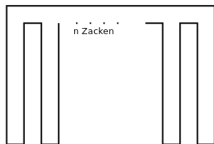
- ▶ Wähle beliebig eine Farbe und platziere Wächter auf allen Ecken dieser Farbe
- ▶ Wächter können alle Dreiecke einsehen, damit wird also der gesamte Raum überwacht
- ▶ Und es wurden  $n/3$  Wächter benötigt.

# Anwendung

- ▶ Digitale Bildbearbeitung
- ▶ Wegfindung in der Robotik
- ▶ Beleuchtungsprobleme von Bühnen
- ▶ Beobachtung von Tierpopulationen in der Natur
- ▶ Aufstellung von Sonden zur Wetterbeobachtung

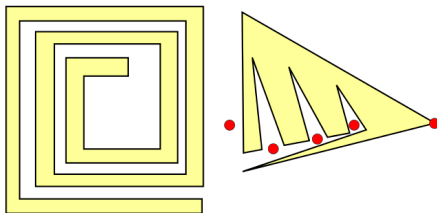
# Einschränkung auf Orthogonale Polygone

- ▶ Orthogonale Polygone benötigen  $\lfloor n/4 \rfloor$  Wächter
- ▶ Beweis funktioniert ähnlich: Zerlegung in konvexe Vierecke
- ▶ resultierender Graph ist 4-färbbar
- ▶ Wächter werden an den Ecken mit der seltensten Farbe platziert



# Verallgemeinerung auf Außenbereiche

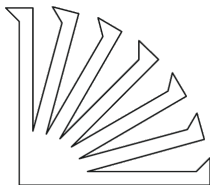
- ▶ Das Festungsproblem: Wächter überwachen Außenbereich des Polygons
- ▶ Im allgemeinen Fall:  $\lceil n/2 \rceil$  Wächter ausreichend (Joseph ORourke)
- ▶ Für orthogonale 'Festungen':  $\lceil n/4 \rceil + 1$  Wächter ausreichend (Argawal)



# Verallgemeinerung auf bewegliche Wächter

- ▶ Das Wandwächter-Problem

*Nehmen wir an, dass jeder Wächter an einer Wand des Museums entlang läuft, und alles überwacht, was von irgendeinem Punkt der Wand aus zu sehen ist. Wie viele solche Wandwächter brauchen wir, um das gesamte Museum zu überwachen?*

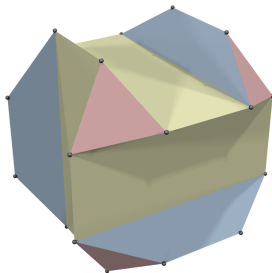


- ▶ Godfried Toussaint vermutet  $\lfloor n/4 \rfloor$  Wächter
- ▶ noch kein Beweis gefunden



# Verallgemeinerung auf dreidimensionale Museen

- ▶ Falls das Museum ein dreidimensionales Gebilde ist, reicht es nicht einmal, auf jeder einzelnen Ecke einen Wchter zu platzieren
- ▶ Die Oberfläche würde überwacht, aber es kann Punkte im Inneren geben, die nicht im Blickfeld eines Wächters liegen



# Verallgemeinerung

- ▶ Aigner, Martin, Günter M. Ziegler, and Karl H. Hofmann. Das BUCH der Beweise. Vol. 2. Springer, 2010.
- ▶ [https://de.wikipedia.org/wiki/Problem\\_der\\_Museumswächter](https://de.wikipedia.org/wiki/Problem_der_Museumswächter)
- ▶ [https://en.wikipedia.org/wiki/Art\\_gallery\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Art_gallery_problem)