Das Bertrandsche Postulat

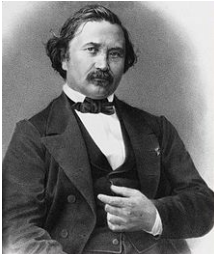
Hendrik Lohmann

14. Dezember 2015

Das Bertrandsche Postulat

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{P}: \quad n < p \leq 2n$$

- Die Lücke bis zur nächsten Primzahl ist nicht größer als die Zahl an der wir die Suche beginnen.
- Behauptung wurde 1845 aufgestellt und bis $n = 3\,000\,000$ verifiziert.
- 1850 bewiesen von Pafnuty Tschebyschew
- Unser Beweis von Paul Erdos erschien 1932



Joseph Bertrand

Übersicht

1 Beweis für $n \leq 511 = 2^9 - 1$

2 $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ für alle $x \geq 2$

3 In Primfaktorzerlegung $\binom{2n}{n}$ $n \geq 3$ sind Primzahlen $\sqrt{2n} < p \leq 2n$ höchstens einmal und Primzahlen $\frac{2}{3}n < p \leq n$ gar nicht enthalten

4 Abschätzung von $\binom{2n}{n}$

5 Zusammenführung

Beweis für $n \leq 511 = 2^9 - 1$

Könnten 511 Fälle betrachten

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

… 511

Beweis für $n \leq 511 = 2^9 - 1$

Könnten 511 Fälle betrachten

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

...511

Klüger: Landau-Trick

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

...511

Beweis für $n \le 511 = 2^9 - 1$

Wir betrachten also die Zahlen:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 23,\ ,42\ ,83\ .163\ ,317\ ,521$$

$\square$

Übersicht

1. Beweis für $n \leq 511 = 2^9 - 1$
2. $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ für alle $x \geq 2$
3. In Primfaktorzerlegung $\binom{2n}{n}$ $n \geq 3$ sind Primzahlen $\sqrt{2n} < p \leq 2n$ höchstens einmal und Primzahlen $\frac{2}{3}n < p \leq n$ gar nicht enthalten
4. Abschätzung von $\binom{2n}{n}$
5. Zusammenführung

Vorüberlegung

- Binomialkoeffizienten sind immer ganzzahlig.
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p$ mit $4^{q-1} \leq 4^{x-1}$

Wir multiplizieren also bis zur letzten Primzahl q und erhalten dasselbe Produkt.

Beispiel

$$\prod_{p \leq 6} p = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \prod_{p \leq 5} p$$

Es reicht also das Produkt $\prod_{p \leq q} p$ zu betrachten.

$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ für alle $x \geq 2$

Induktionsanfang

für $x = q = 2$ erhalten wir:

$$\prod_{p \leq 2} p = 2 \leq 4^{2-1} = 4^1 = 4$$

Induktionsannahme

Wir betrachten nun also die ungeraden Primzahlen $q = 2m + 1$ und dürfen Annehmen, dass die Aussage für alle ganzen Zahlen in $\{2, 3, ..., 2m\}$ gilt.

$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ für alle $x \geq 2$

Behauptung

Die Aussage gilt für $q = 2m + 1$, sodass

$$\prod_{p \leq 2m+1} p \leq 4^{2m}$$

Beweis

Zunächst zerlegen wir das Produkt.

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$$

$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ für alle $x \geq 2$

Da $m + 1 \in \{2, 3, ..., 2m\}$ gilt:

$$\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$$

Bleibt zu zeigen, dass

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m$$

Hierzu betrachten wir zunächst

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$$

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$$

Hier kann man erkennen, dass es eine grobe Abschätzung ist.

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2m+1}{m!(m+1)!} = \frac{m+1\cdot \ldots \cdot 2m+1}{(m+1)!}$$

$$= \frac{m+2\cdot \ldots \cdot 2m+1}{m!}$$

Beispiel $m = 5$

$$\prod_{6<p\leq 11} p = 7\cdot 11 \leq \binom{11}{5} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 462$$

$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ für alle $x \geq 2$

Nun müssen wir nur noch folgendes zeigen:

$$\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$$

Es gilt:

$$\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$$

Desweiteren gilt:

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

Deswegen:

$$\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m} = 4^m$$

$\prod_{p \le x} p \le 4^{x-1}$ für alle $x \ge 2$

Nun alles zusammen:

$$\prod_{p \le 2m+1} p = \prod_{p \le m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \le 2m+1} p \le 4^m \cdot 4^m = 4^{2m}$$

$\square$

Übersicht

1. Beweis für $n \leq 511 = 2^9 - 1$
2. $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ für alle $x \geq 2$
3. In Primfaktorzerlegung $\binom{2n}{n}$ $n \geq 3$ sind Primzahlen $\sqrt{2n} < p \leq 2n$ höchstens einmal und Primzahlen $\frac{2}{3}n < p \leq n$ gar nicht enthalten
4. Abschätzung von $\binom{2n}{n}$
5. Zusammenführung

In Primfaktorzerlegung $\binom{2n}{n}$ $n \geq 3$ sind Primzahlen $\sqrt{2n} < p \leq 2n$ höchstens einmal und Primzahlen $\frac{2}{3}n < p \leq n$ gar nicht enthalten

Warum wollen wir das Wissen?

In Primfaktorzerlegung $\binom{2n}{n}$ $n \geq 3$ sind Primzahlen $\sqrt{2n} < p \leq 2n$ höchstens einmal und Primzahlen $\frac{2}{3}n < p \leq n$ gar nicht enthalten

Warum wollen wir das Wissen?

Durch die Kombination über das Wissen der „Orte“der Primzahlen in der Primfaktorzerlegung von $\binom{2n}{n}$ und einer Größenabschätzung von $\binom{2n}{n}$, lässt sich eine Aussage über die Größe von $P(n)$ machen, welche die Anzahl der Primzahlen zwischen n und $2n$ angibt.

$\sqrt{2n} < p \leq 2n$ höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$

Nach Legendere enthält $n!$ den Primfaktor p genau

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Beweis bei Bedarf hierzu zum Schluss.
Demnach enthält $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ den Primfaktor p genau

$$\sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

Davon ist jeder Summand höchsten 1, da

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2 \left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) = 2$$

und ganzzahlig ist.

$\sqrt{2n} < p \leq 2n$ höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$

$$\sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leq \max\{r : p^r \leq 2n\}$$

$\Rightarrow$ die größte Potenz von p, die $\binom{2n}{n}$ teilt, ist kleiner oder gleich $2n$ und Primzahlen die größer sind als $\sqrt{2n}$ höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$ enthalten.

$\frac{2}{3}n < p \leq n$ gar nicht in $\binom{2n}{n}$

Für $3p > 2n$ mit $n > 3$ und dadurch $p \geq 3$ sind p und $2p$ die einzigen Vielfachen von p, welche als Faktoren im Zähler von $\frac{(2n)!}{n!n!}$ auftauchen.
Im Nenner haben wir zwei p-Faktoren.

Beispiel

$$\binom{30}{15} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$

$$\frac{2}{3} \cdot 15 = 10$$

Keine Primzahl zwischen 10 und 15 enthalten.

Übersicht

1 Beweis für $n \leq 511 = 2^9 - 1$

2 $\prod\limits_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ für alle $x \geq 2$

3 In Primfaktorzerlegung $\binom{2n}{n}$ $n \geq 3$ sind Primzahlen $\sqrt{2n} < p \leq 2n$ höchstens einmal und Primzahlen $\frac{2}{3}n < p \leq n$ gar nicht enthalten

4 Abschätzung von $\binom{2n}{n}$

5 Zusammenführung

Abschätzung von $\binom{2n}{n}$

Da

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

folgt

$$\binom{n}{k} \leq 2^n$$

und

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{2^n}{n}$$

somit gilt:

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$$

Abschätzung von $\binom{2n}{n}$

Erinnerung

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \leq \max\{r : p^r \leq 2n\}$$

Somit lässt sich $\binom{2n}{n}$ wie folgt abschätzen

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq\sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p$$

Ist in etwa eine Primfaktorzerlegung ab $\sqrt{2n}$ nur größer durch Faktor $2n$.

Abschätzung von $\binom{2n}{n}$

Abschätzung:

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$$

Es gilt:

$$\frac{4^n}{2n} < ((2n)^{\sqrt{2n}}) \cdot (4^{\frac{2}{3}n}) \cdot (2n)^{P(n)}$$

Denn:

- Es gibt nicht mehr als $\sqrt{2n}$ Primzahlen.
- Abschätzung $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$
- P(n) ist Anzahl von Primzahlen zwischen n und $2n$

Abschätzung von $\binom{2n}{n}$

$$\frac{4^n}{2n} < ((2n)^{\sqrt{2n}}) \cdot (4^{\frac{2}{3}n}) \cdot (2n)^{P(n)}$$

somit

$$4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)}$$

Übersicht

Zusammenführung

Wir hatten

$$4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)}$$

Durch Anwendung vom Logarithmus zur Basis 2 erhalten wir nun eine Aussagen über $P(n)$ (Anzahl Primzahlen zwischen n und $2n$)

$$P(n) > \frac{2n}{3 \cdot log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1)$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die rechte Seite der Ungleichung größer als 0 ist für ein groß genügendes n. Dann wissen wir, dass es mindestens eine Primzahl zwischen n und $2n$ gibt.

Zusammenführung

Vorschläge für ein n?

Zusammenführung

Vorschläge für ein n?

$$n = 512 = 2^9$$

Zusammenführung

$$P(n) > 0$$

$$\Leftarrow$$

$$\frac{2n}{3 \cdot log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1) > 0$$

$$\Leftarrow$$

$$\frac{2n - 1}{3 \cdot log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1) > 0$$

$$\Leftarrow$$

$$\frac{2n - 1}{3 \cdot log_2(2n)} > \sqrt{2n} + 1$$

$$\Leftarrow$$

$$\frac{2n - 1}{\sqrt{2n} + 1} > 3 \cdot log_2(2n)$$

Zusammenführung

$$\Leftarrow$$

$$\frac{2n-1}{\sqrt{2n}+1} = \sqrt{2n} - 1 > 3 \cdot log_2(2n)$$

$$31 > 30$$

für $n = 2^9$

Zusammenführung

Betrachtung der Ableitungen

$$(\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

und

$$(3 \cdot log_2(x))' = \frac{3}{\ln(2) \cdot x}$$

zeigt, dass ab ungefähr $x = 75$
$\sqrt{x} - 1$ schneller wächst als $3 \cdot log_2(x)$.
Damit sicherlich auch für $2^{10} = 2 \cdot 2^9$ Somit ist das Bertrandsche Postulat bewiesen.

$\square$

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit

Gibt es noch Fragen?