Das Bildchensammlerproblem

Tilman Stampe

Problemstellung

- Es gibt ein Sammelalbum mit einer feste Anzahl Bilder, die einzeln zufällig gekauft werden.

- Annahmen:
  - Bei jedem Kauf ist es gleich wahrscheinlich ein bestimmtes Bild zu erhalten

- Wie viele Bildchen müssen gekauft werden, bis man von jedem eines erhalten hat?
  - Im Erwartungswert
  - Mit hoher Wahrscheinlichkeit (95%, 99%) nicht mehr benötigt

- Beispiel: 540 Bildern im Panini EM 2012 Album, 0,12€ je Bild

Mathematische Formulierung

- Anzahl verschiedener Bilder: n
- Wahrscheinlichkeit eine bestimmtes Bild zu erhalten 1/n
- Ziehen aus einer Urne mit N verschiedenen Kugeln, mit zurücklegen
- Wahrscheinlichkeit die k+1-te Kugel zu ziehen, nachdem schon k verschiedene gezogen wurden:

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

- Wahrscheinlichkeit die k+1-te Kugel genau bei Ziehung s zu erhalten:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

Erwartungswert

- Erwartungswert für das Ziehen der k+1-ten Kugel:

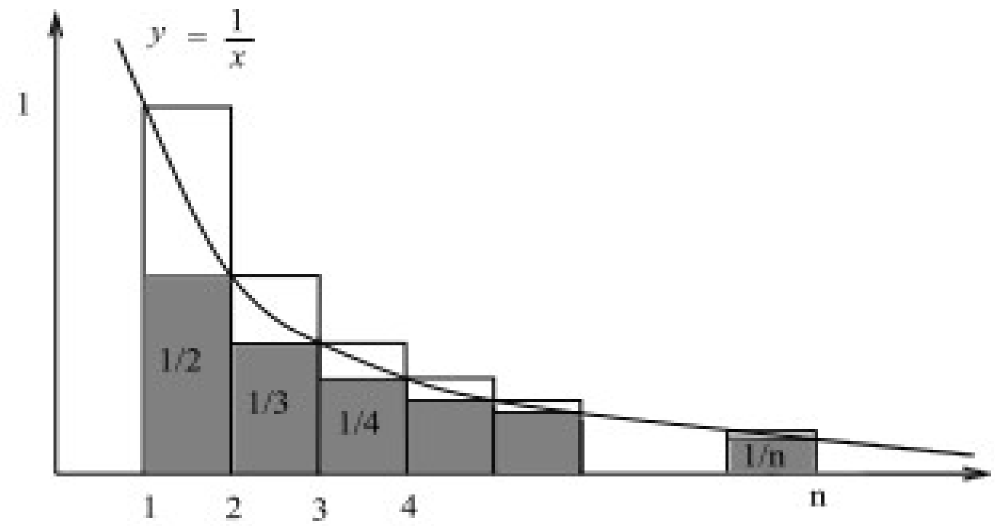
$$\sum_{s\geq 1} \left(\frac{k}{n}\right)^{s-1} \left(1-\frac{k}{n}\right) s = \frac{1}{1-\frac{k}{n}}$$

- Erwartungswert für das Ziehen aller Kugeln:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{1}\right) = nH_n$$

$$\approx n \ln n$$

Abschätzen der Harmonischen Reihe



Graue Rechtecke:

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

Weiße Rechtecke:

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

Zusammen: $$\ln n + \frac{1}{n} < H_n < \ln n + 1$$

Wahrscheinlichkeit für mehr Ziehungen

$$m := \lceil n \ln n + cn \rceil \qquad n \geq 1, \quad c \geq 0$$

Anzahl der benötigten Ziehungen, um jede Kugel zu erhalten: V_n

Wahrscheinlichkeit mehr als m Ziehungen zu benötigen:

$$P[V_n > m] \leq e^{-c}$$

Ereignis, dass die Kugel i in den ersten m Ziehungen nicht gezogen wird: A_i

$$P[V_n > m] = P[\bigcup_i A_i]$$

Beweis

$$P[V_n > m] = P[\bigcup_i A_i] \le \sum_i P[A_i]$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

$$= n\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^{m/n} < ne^{-m/n} \le e^{-c}$$

Beispiel: 540 Bilder

- Erwartungswert = 3397

  Preis = 3397 * 0,12€ = 407,64€

- Wahrscheinlichkeit =< 5%

  Anzahl Ziehungen = 3397 + 3*540 = 5017

  Preis = 602,04 €

- Wahrscheinlichkeit =< 1%

  Anzahl Ziehungen = 3397 + 4,6*540 =5881

  Preis = 705,72€

Quellen

- Martin Aigner, Günter M. Ziegler.

  Das BUCH der Beweise. Auflage 2, 2003

  ISBN: 3-540-40185-7