Das Bertrandsche Postulat

Humboldt-Universität zu Berlin
Proseminar: „Das BUCH der Beweise“
Dozent: Wolfgang Kössler
WS 2012/13

Referentin: Maria Kiebinger

• Joseph **Bertrand**, 1845

Behauptung:

$$\boxed{\textit{Für jedes } n \geq 1 \textit{ gibt es eine Primzahl } p \textit{ mit } n < p \leq 2\text{n.}}$$

→ bis n= 3000000 verifiziert

• erster vollständiger Beweis 1850 von Pafnuty Tschebyschew

• folgender Beweis von Paul Erdős

Vorüberlegungen

$$N := 2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot p \qquad \text{mit } p \textit{ prim} \text{ und } p<k+2$$

Betrachten: $\underbrace{N+2,\ N+3,\ N+4,\ \ldots,\ N+k\,,\ N+(k+1)}_{\text{k Folgezahlen nicht prim}}$

Beispiel: $k=10 \;\Rightarrow\; N=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11 \;=\; 2310$

$$\begin{array}{lll}
N+2=2312 & 2|2310 \;\Rightarrow & 2|(2310+2) \\
N+3=2313 & 3|2310 \;\Rightarrow & 3|(2310+3) \\
N+4=2314 & 2|2310 \;\Rightarrow & 2|(2310+2+2) \\
\vdots & & \vdots \\
N+11=2321 & 11|2310 \;\Rightarrow & 11|(2310+11)
\end{array}$$

→ keine der k=10 Zahlen sind Primzahlen

$$\textit{Für jedes } n \geq 1 \textit{ gibt es eine Primzahl } p \textit{ mit } n < p \leq 2\mathrm{n}.$$

Beweis:

(1) Für n<4000 klar, wenn man folgende Primzahlen betrachtet:

2, 3, 5, 7, 13, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001

jedes Intervall $\{y: \; n < y \leq 2\mathrm{n}\} \;\text{ mit }\; n \leq 4000$

enthält eine dieser Primzahlen

Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2\mathrm{n}$.

(2) Behauptung: $$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$$

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \quad \text{und} \quad 4^{q-1} \leq 4^{x-1}, \text{ da } q \leq x$$

$(q$ sei die größte Primzahl im Intervall$)$

IA: $x = 2 \Rightarrow 2 \leq 4$

IS: alle folgenden Primzahlen ungerade, setzen *q=2m+1*

$$\prod_{p \leq 2\mathrm{m}+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2\mathrm{m}+1} p$$

$$\overset{\text{Beh}}{\leq} 4^m \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2\mathrm{m}+1} p$$

Abschätzung

$$\text{Für jedes } n \geq 1 \text{ gibt es eine Primzahl } p \text{ mit } n < p \leq 2\mathrm{n}.$$

$$\prod_{m+1 < p \leq 2\mathrm{m}+1} p \leq \binom{2\mathrm{m}+1}{m} = \frac{(2\mathrm{m}+1)!}{m! \cdot (m+1)!} \leq 2^{2\mathrm{m}}$$

Bsp: m=3

$$\prod_{4 < p \leq 7} p = 5 \cdot 7 \leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \boxed{5 \cdot 6 \cdot 7}}{3! \cdot 4!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \binom{7}{3}$$

$$\boxed{\text{Es gilt}: \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n} \Rightarrow \sum_{m=0}^{2\mathrm{m}+1} \binom{2\mathrm{m}+1}{m} = 2^{2\mathrm{m}+1}, \text{ d.h. } \binom{2\mathrm{m}+1}{m} \leq 2^{2\mathrm{m}+1}$$

$$\text{da } \binom{2\mathrm{m}+1}{m} = \binom{2\mathrm{m}+1}{m+1} \text{ gilt insbesondere } \binom{2\mathrm{m}+1}{m} \leq 2^{2\mathrm{m}}$$

$$\text{Für jedes } n \geq 1 \text{ gibt es eine Primzahl } p \text{ mit } n < p \leq 2\text{n.}$$

(2) Behauptung: $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \quad \text{und} \quad 4^{q-1} \leq 4^{x-1} \quad \text{, da} \quad q \leq x$$

$(q \text{ sei die größte Primzahl im Intervall})$

IA: $x = 2 \Rightarrow 2 \leq 4$

IS: alle folgenden Primzahlen ungerade, setzen *q=2m+1*

$$\prod_{p \leq 2\text{m}+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2\text{m}+1} p$$

$$\overset{\text{Beh}}{\leq} 4^m \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2\text{m}+1} p$$

Abschätzung

Für jedes $n \geq 1$ *gibt es eine Primzahl* p *mit* $n < p \leq 2\mathrm{n}$.

(2) Behauptung: $$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$$

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \quad \text{und} \quad 4^{q-1} \leq 4^{x-1} \quad , \text{da} \quad q \leq x$$

$(q\,\text{sei die größte Primzahl im Intervall})$

IA: $x = 2 \;\Rightarrow\; 2 \leq 4$

IS: alle folgenden Primzahlen ungerade, setzen *q=2m+1*

$$\prod_{p \leq 2\mathrm{m}+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2\mathrm{m}+1} p$$

$$\leq \quad 4^{m} \cdot 2^{2\mathrm{m}} = 4^{2\mathrm{m}}$$

$\square$

Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2$n.

(3) Satz von Legendre anwenden:

Die Zahl n! enthält den Primfaktor p genau $\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ *Mal.*

Bsp: $n = 6 \quad \Rightarrow \quad n! = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$\left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{2^3} \right\rfloor + \ldots = 3 + 1 + 0 + \ldots = 4$$

$$\left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{3^2} \right\rfloor + \ldots = 2 + 0 + \ldots = 2$$

die Summanden verschwinden, sobald $p^k > n$

$$\textit{Für jedes } n \geq 1 \textit{ gibt es eine Primzahl } p \textit{ mit } n < p \leq 2\mathrm{n}.$$

(3) Satz von Legendre anwenden:

Die Zahl n! enthält den Primfaktor p genau $\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ *Mal.*

$$\text{Für } \binom{2\mathrm{n}}{n} = \frac{(2\mathrm{n})!}{n!n!} \text{ folgt:}$$

$$\text{es enthält den Primfaktor } p \text{ genau } \sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2\mathrm{n}}{p^k} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \text{ Mal und}$$

$$\left\lfloor \frac{2\mathrm{n}}{p^k} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2\mathrm{n}}{p^k} - 2 \cdot \left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) = 2$$

⇒ jeder Summand ist maximal 1

$$\textit{Für jedes } n \geq 1 \textit{ gibt es eine Primzahl } p \textit{ mit } n < p \leq 2\mathrm{n}.$$

$\binom{2\mathrm{n}}{n}$ enthält den Faktor p genau k Mal, wobei $k = max\{r : p^r \leq 2\mathrm{n}\}$

- $k > 1$ nur möglich, wenn $p < \sqrt{2\mathrm{n}}$, da sonst schon $p^2 > 2\mathrm{n}$
- $k = 1$, wenn $\sqrt{2\mathrm{n}} < p \leq \frac{2}{3} \cdot n$
- $k = 0$, wenn $\frac{2}{3} \cdot n < p \leq n$, da für $3\mathrm{p} > 2\mathrm{n}$ mit $n, p \geq 3$ *gilt*:

  $\frac{(2\mathrm{n})!}{n!n!}$ teilen $2p$ und p den Zähler und $p \cdot p$ den Nenner

Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2\text{n}$.

Bsp:

$$\sqrt{2\text{n}} < p \leq \frac{2}{3} \cdot n$$

$$\binom{26}{13} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$

$$\binom{28}{14} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$

$$\binom{30}{15} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$

$$p < \sqrt{2\text{n}}$$

$$\frac{2}{3} \cdot n < p \leq n$$

$$n < p \leq 2\text{n}$$

Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2\mathrm{n}$.

(4)

$$\binom{26}{13} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot \quad 7 \quad \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$

$$8 \leq 26 \qquad 25 \leq 26$$

$$\frac{4^n}{2\mathrm{n}} \leq \binom{2\mathrm{n}}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2\mathrm{n}}} 2\mathrm{n} \cdot \prod_{\sqrt{2\mathrm{n}} < p \leq \frac{2}{3} \cdot n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2\mathrm{n}} p$$

maximal $\sqrt{2\mathrm{n}}$ Faktoren

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

mittlerer Binomialkoeffizient ist der größte Wert

$$\Rightarrow \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq \frac{2^n}{n} \quad \forall\, n \geq 2$$

und $$\binom{2\mathrm{n}}{n} \geq \frac{4^n}{2\mathrm{n}} \quad \forall\, n \geq 1$$

$$\text{Für jedes } n \geq 1 \text{ gibt es eine Primzahl } p \text{ mit } n < p \leq 2\mathrm{n}.$$

(4) $$\binom{26}{13} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot \quad 7 \quad \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$

$$\frac{4^n}{2\mathrm{n}} \leq (2\mathrm{n})^{\sqrt{2\mathrm{n}}} \cdot \prod_{\sqrt{2\mathrm{n}} < p \leq \frac{2}{3} \cdot n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2\mathrm{n}} p$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^n \leq (2\mathrm{n})^{1+\sqrt{2\mathrm{n}}} \cdot \prod_{\sqrt{2\mathrm{n}} < p \leq \frac{2}{3} \cdot n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2\mathrm{n}} p \qquad \forall\, n \geq 3$$

$$\textit{Für jedes } n \geq 1 \textit{ gibt es eine Primzahl } p \textit{ mit } n < p \leq 2\mathrm{n}.$$

(5) $$4^n \leq (2\mathrm{n})^{1+\sqrt{2\mathrm{n}}} \cdot \prod_{\sqrt{2\mathrm{n}} < p \leq \frac{2}{3}\cdot n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2\mathrm{n}} p \qquad \forall\, n \geq 3$$

Annahme: es existiert keine Primzahl p im Intervall (n, 2n], d.h. $\prod_{n < p \leq 2\mathrm{n}} p = 1$

Setzen $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$ ein für $\prod_{\sqrt{2\mathrm{n}} < p \leq \frac{2}{3}\cdot n} p$

$$4^n \leq (2\mathrm{n})^{1+\sqrt{2\mathrm{n}}} \cdot 4^{\frac{2}{3}\cdot n}$$

$$\Leftrightarrow\ 4^{\frac{1}{3}\cdot n} \leq (2\mathrm{n})^{1+\sqrt{2\mathrm{n}}}$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{\frac{2}{3}\cdot n} \leq (2\mathrm{n})^{1+\sqrt{2\mathrm{n}}}$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{2\mathrm{n}} \leq (2\mathrm{n})^{3\cdot(1+\sqrt{2\mathrm{n}})}$$

Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2\mathrm{n}$.

(5)

$$2\mathrm{n} \;=\; \left(\sqrt[6]{2\mathrm{n}}\right)^6 \;<\; \left(\left\lfloor\sqrt[6]{2\mathrm{n}}\right\rfloor + 1\right)^6 \;<\; 2^{6\cdot\left\lfloor\sqrt[6]{2\mathrm{n}}\right\rfloor} \;\leq\; 2^{6\cdot\sqrt[6]{2\mathrm{n}}}$$

da $a+1 \;<\; 2^a \quad \forall\, a \geq 2$ per Induktion

$$2^{2\mathrm{n}} \leq (2\mathrm{n})^{3\cdot(1+\sqrt{2\mathrm{n}})} < \left(2^{6\cdot\sqrt[6]{2\mathrm{n}}}\right)^{3\cdot(1+\sqrt{2\mathrm{n}})} = 2^{\sqrt[6]{2\mathrm{n}}\,(18+18\sqrt{2\mathrm{n}})} < 2^{20\sqrt[6]{2\mathrm{n}}\sqrt{2\mathrm{n}}} = 2^{20(2\mathrm{n})^{\frac{2}{3}}}$$

da $18 < 2\cdot\sqrt{2\mathrm{n}} \quad \forall\, n \geq 50$

$$2^{2\mathrm{n}} \leq \; 2^{20(2\mathrm{n})^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\mathrm{n} \;\leq\; 20(2\mathrm{n})^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\mathrm{n})^{\frac{1}{3}} \leq \; 20$$

$$\Leftrightarrow \quad n \;\leq\; 4000 \quad \lightning$$

Quelle

„Das BUCH der Beweise“

Martin Aigner und Günter M. Ziegler, 3. Auflage,