Übung zu Angewandte Mathematik für die Informatik

Teil 1: Numerik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wolfgang Kössler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Informatik

21. April 2020

1. (aus Stoer und Bulirsch)

Dezimalrechnung auf 8 Stellen genau

$$
\begin{aligned}
a &= 0.23371258 \cdot 10^{-4} \\
b &= 0.33678429 \cdot 10^{2} \\
c &= -0.33677811 \cdot 10^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a \boxed{+} b) \boxed{+} c &= 0.33678452 \cdot 10^{2} \boxed{-} 0.33677811 \cdot 10^{2} = \\
&= 0.64100 \cdot 10^{-3} \\
a \boxed{+} (b \boxed{+} c) &= 0.23371258 \cdot 10^{-4} \boxed{+} 0.618000 \cdot 10^{-3} \\
&= 0.64137126 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

2. 0.2 als Gleitkommazahl

- Begründen Sie, warum 0.2 im Binärsystem nicht exakt darstellbar ist!
- Stellen Sie die Zahl 0.2 im Binärsystem auf 3 Dezimalstellen genau dar.

$$0.2 = \frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{l} a_i \frac{1}{2^i}, \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

nicht lösbar, da 2^l nicht durch 5 teilbar.

$$\frac{1}{5} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{16}}_{\frac{3}{16}} + \frac{1}{128}}_{\frac{25}{128}} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024}}_{0.200195} + \cdots = \underbrace{\frac{25}{128} + \frac{1}{256}}_{\frac{51}{256}=0.199707} + \cdots$$

3. Matrixnorm

Sei $||.||$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$ und $||\mathbf{A}||$ definiert durch

$$||\mathbf{A}|| := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{||\mathbf{A}\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}$$

Zeigen Sie

1. das Supremum existiert und es gilt $||\mathbf{A}|| = \sup_{||x||=1} ||\mathbf{A}\mathbf{x}||$.
2. $||\mathbf{A}||$ ist eine Norm.
3. Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Matrizen, so dass das Produkt gebildet werden kann. Dann $||\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{B}||$.
4. Zeigen Sie, dass die Spaltensummennorm $||.||_1$ durch die Norm $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ erzeugt wird.
5. Es gibt eine Folge $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ so dass $||\mathbf{A}||_1 = \limsup_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{||\mathbf{A}\mathbf{x}||_1}{||\mathbf{x}||_1}$.

zu 1. $||\mathbf{A}|| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Ax}||}{||\mathbf{x}||} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} ||\mathbf{A}\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}|| = \sup_{||\tilde{\mathbf{x}}||=1} ||\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}||$

zu 2.

1. $||\mathbf{A}|| \geq 0$ trivial

   $||\mathbf{A}|| = 0$ gdw. $||\mathbf{Ax}|| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ gdw. $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (Nullmatrix)
2. $||\alpha\mathbf{A}|| = \alpha||\mathbf{A}||$ trivial
3.

$$\begin{aligned} ||\mathbf{A}+\mathbf{B}|| &= \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}||}{||\mathbf{x}||} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Ax}||+||\mathbf{Bx}||}{||\mathbf{x}||} \leq \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Ax}||}{||\mathbf{x}||} + \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Bx}||}{||\mathbf{x}||} \\ &= ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||. \end{aligned}$$

zu 3. Es sei $||\mathbf{B}|| \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
||\mathbf{AB}|| &= \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0},\mathbf{Bx}\neq\mathbf{0}} \frac{||(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{Bx})||}{||\mathbf{Bx}||}\frac{||\mathbf{Bx}||}{||\mathbf{x}||} \\
&\leq \sup_{\tilde{\mathbf{x}}\neq\mathbf{0}} \frac{||(\mathbf{A}\cdot\tilde{\mathbf{x}}||}{||\tilde{\mathbf{x}}||} \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Bx}||}{||\mathbf{x}||} = ||\mathbf{A}||\cdot||\mathbf{B}||
\end{aligned}$$

zu 4. Es gilt

$$\begin{aligned}
||\mathbf{A}||_1 &= \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Ax}||_1}{||\mathbf{x}||_1} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{1}{||\mathbf{x}||_1} \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j| \\
&\leq \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{1}{||\mathbf{x}||_1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}x_j| \leq \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{1}{||\mathbf{x}||_1} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} |x_j|}_{||\mathbf{x}||_1} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \\
&\leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.
\end{aligned}$$

zu 5. Sei j_0 der Index für den das Maximum in $\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ angenommen wird. Wähle $\tilde{\mathbf{x}} = (0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Stelle}_{j_0}}, 0, \dots, 0)$. Dann

$$\frac{||\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}||_1}{||\tilde{\mathbf{x}}||_1} = \frac{||\sum_j a_{ij}\tilde{\mathbf{x}}||_1}{||\tilde{\mathbf{x}}||_1} = \frac{||\mathbf{a}_{j_0}||\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

wobei $\mathbf{a}_{j_0} = (a_{1j_0}, \dots, a_{nj_0})$.

Offenbar $\tilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{0}$ und wir können schreiben

$$||\mathbf{A}||_1 = \limsup_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{A}\mathbf{x}||_1}{||\mathbf{x}||_1}$$

4. Bestimmen Sie die komponentenweisen und normweisen Konditionen folgender Operationen

1. $f_1(x, y) = x \cdot y$,
2. $f_2(x, y) = \frac{x}{y}$ (ÜA)
3. $f_3(x, y) = \sin(x \cdot y)$ (ÜA)
4. $f_4(x) = \sqrt{x}$

- komponentenweise Konditionen

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,x} &= |f_{1,x},(x,y)| \cdot \frac{|x|}{|f_1(x,y)|} = \left|\frac{y \cdot x}{x \cdot y}\right| = 1 = \kappa_{1,y} \\
\kappa_4 &= |f_4'(x)| \cdot \frac{x}{f_4(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Multiplikation, Division und Wurzelziehen sind gut konditioniert, Sinus schlecht konditioniert für $x \cdot y = k\pi$.

- normweise Konditionen (Spaltensummennorm)

$$
\begin{aligned}
\kappa_{1,\mathrm{abs}} &= ||\mathbf{J}_1||_1 = ||(y,x)||_1 = \max(|y|,|x|) \\
\kappa_{1,\mathrm{rel}} &= \frac{||(x,y)||_1}{||f(x,y)||_1}||\mathbf{J}_1||_1 = \frac{|x|+|y|}{|xy|} = 1 + \frac{\max(|y|,|x|)}{\min(|y|,|x|)}
\end{aligned}
$$

schlechte Kondition für $x \approx 0$ oder $y \approx 0$.

κ_2 und κ_3 sind Übungsaufgaben.

5. Kondition von

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ \sqrt{x} + y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{J} = y - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
||\mathbf{J}|| &= \max(|y| + \frac{1}{2\sqrt{x}}, |x| + 1) \\
\kappa_{rel} &= \frac{||\mathbf{x}||}{||f(\mathbf{x})||}||\mathbf{J}|| = \frac{|x| + |y|}{|xy| + |\sqrt{x} + y|} \cdot \max(|y| + \frac{1}{2\sqrt{x}}, |x| + 1) \\
\kappa_{abs,1,1} &= |y|, \qquad \kappa_{rel,1,1} = \frac{|x|}{|xy|}|y| = 1 \\
\kappa_{abs,1,2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \kappa_{rel,1,2} = \frac{|x|}{|\sqrt{x} + y|}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\kappa_{abs,2,1} &= |x|, \qquad \kappa_{rel,2,1} = \frac{|y|}{xy|}|x| = 1 \\
\kappa_{abs,2,2} &= 1, \qquad \kappa_{rel,2,2} = \frac{|y|}{|\sqrt{x} + y|}
\end{aligned}$$

6. Betrachten sie die Funktion $f(x) = x - \sin(x)$

Vergleichen Sie folgende Implementationen und berechnen Sie jeweils $f(x_0)$ mit $x_0 = 10^{-12}$.

- direkte Implementation $f(10^{-12}) = 0$
- Taylorreihe bis zum Grad 7. $1.\overline{6} \cdot 10^{-37}$
- mit dem Horner Schema $1.\overline{6} \cdot 10^{-37}$

Lösung siehe Computer-Algebra (Gleitkommagenauigkeit.nb).

7. Kondition von $f(x) = x - \sin(x)$

$$\begin{aligned}
\kappa_{abs} &= |J| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |1 - \cos(x)| \\
\kappa_{rel} &= \frac{|x|}{|f(x)|}|J| = \frac{|x||1-\cos(x)|}{|x-\sin(x)|} = \frac{1}{1-\frac{\sin(x)}{x}}|1-\cos(x)| \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + - \cdots \\
\frac{x - \sin(x)}{x} &= \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{4!} - + \ldots \\
1 - \cos(x) &= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + - \cdots \\
\kappa_{rel} &\to 3 \quad (x \to 0)
\end{aligned}$$

gute Kondition für $x \approx 0$

8. Betrachten sie die Funktion $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$

- Berechnen Sie die Problemkondition bzgl. der $||.||$ Norm und untersuchen Sie die Fälle $x \approx y$ und $x \approx y \approx 0$.
- Untersuchen Sie die direkte Implementation $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$
- Untersuchen Sie die Implementation $g(x, y) = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.

- Für die Jacobi-Matrix erhalten wir $\mathbf{J} = (\cos(x), -\cos(y))$, $||\mathbf{J}|| = \max(|\cos(x)|, |-\cos(y)|) \leq 1$, woraus folgt
$$\kappa_{\mathrm{rel}} = \frac{||(x, y)||_1}{||f(x, y)||_1} ||\mathbf{J}||_1 = \frac{|x| + |y|}{|\sin(x) - \sin(y)|} ||\mathbf{J}||_1$$
schlecht konditioniert, falls $x \approx y$.
- der dritte Teil wird hier zu aufwendig.

- $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$

$$
\begin{aligned}
\tilde{u} &= \sin(x)(1+\varepsilon_1) \\
\tilde{v} &= \sin(y)(1+\varepsilon_2) \\
\tilde{w} &= (\tilde{u} - \tilde{v})(1+\varepsilon_3) \\
&= (\sin(x)(1+\varepsilon_1) - \sin(y)(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3) \\
&= \sin(x) - \sin(y) + (\sin(x) - \sin(y))\varepsilon_3 + \varepsilon_1 \sin(x) \\
&\quad -\varepsilon_2 \sin(y) + \varepsilon_4 \\
\frac{|\Delta w|}{|w|} &= \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_1 \sin(x) - \varepsilon_2 \sin(y) + \varepsilon_4}{\sin(x) - \sin(y)}
\end{aligned}
$$

9. Berechnen Sie die folgenden (identischen) Funktionen und entscheiden Sie, welche der beiden numerisch stabiler ist. Begründen Sie.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1-x}{1+2x} - \frac{1-2x}{1+x} \\ g(x) &:= \frac{3x^2}{(1+2x)(1+x)} \end{aligned}$$

1. Kondition berechnen
2. relative Fehler bei Berechnung von $f(x)$ bzw. $g(x)$ für $x \approx 0$.

Lösung siehe Computeralgebra (Gleitkommagenauigkeit.nb).

10. Matrixnorm und Kondition der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$||A|| = 2+4+5 = 11 \qquad ||A^{-1}|| = 1$$

$$cond(A) = 11$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} -24 & 12 & 4 \\ 20 & -10 & 6 \\ 18 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$||B|| = 8 \qquad ||B^{-1}|| = \frac{62}{56} \qquad cond(B) = \frac{62}{7}$$

11. Jacobi Verfahren und Gauß-Seidel Verfahren

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jeweils mit dem Jacobi Verfahren (5 Iterationen) und Gauß-Seidel Verfahren (2 Iterationen). Vergleichen Sie mit dem exakten Resultat.

Kondition von $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$: $\qquad ||A|| = 6,$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad ||A^{-1}|| = \frac{1}{2}, \qquad cond(A) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

exakte Lösung: $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$, $\quad C = diag(A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Jacobi-Verfahren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{CA})\mathbf{x}_n + \mathbf{Cb} \\
&= (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix})\mathbf{x}_n + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}_n + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 &= (0, 0)\\
\mathbf{x}_1 &= (\frac{1}{3}, 0)\\
\mathbf{x}_2 &= (\frac{1}{3}, -\frac{1}{12})\\
\mathbf{x}_3 &= (\frac{7}{18}, -\frac{1}{12})\\
\mathbf{x}_4 &= (\frac{7}{18}, -\frac{7}{72})\\
\mathbf{x}_5 &= (\frac{43}{108}, -\frac{7}{72})\\
\mathbf{x}_6 &= (\frac{43}{108}, -\frac{43}{432})
\end{aligned}
$$

Gauß Seidel-Verfahren

$$A = L + D + R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{m+1} &= \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x}_m - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{x}_{m+1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \\
&= \frac{1}{12}\left(-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}_m - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}_{m+1} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(-\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}_m - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}_{m+1} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
x_{m+1,1} &= -\frac{8}{12}x_{m,2} - 0 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x_{m,2} + \frac{1}{3} \\
x_{m+1,2} &= 0 - \frac{3}{12}x_{m+1,1} + 0 = -\frac{1}{4}x_{m+1,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 &= (0,0) \\
x_{1,1} &= \frac{1}{3} \\
x_{2,1} &= -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{12}\right) + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{1}{12} \\
x_{2,2} &= -\frac{7}{72}
\end{aligned}$$

Banach Fixpunktsatz (vgl. Roos/Schwetlick, Numerische Mathematik, 1999, Beispiel 3.18)

12. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, Nullstellen: $x_1 = 1, x_2 = 3$

1. Stellen Sie fest, dass eine naive Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ($g(x) = x^2 - 3x + 3 = x$) wegen $g(x) \notin M$ oder $|g'(x)| \geq 1$ nicht funktioniert.
2. Betrachten Sie die äquivalente Aufgabe $g(x) = x$ mit $g(x) = \frac{x^2+3}{4}$ und zeigen Sie $g(x) \in M \quad \forall x \in M$, wobei $M = [0, \frac{7}{4}]$. Zeigen Sie $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in M$.
3. Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren $x_{n+1} = g(x_n)$ konvergiert für alle Startwerte $x_0 \in M$ gegen x_1.
4. Geben Sie die ersten 5 Iterierten an, wobei $x_0 = 0$.

zu 1. Es gilt $|g'(x)| = |2x - 3| < 1$, gdw. $x \in M := (1, 2)$, aber $g(x)$ ist monoton wachsend für $x > \frac{3}{2}$ und fallend für $x < \frac{3}{2}$, $g(\frac{3}{2}) < 1$ d.h. die Operation $g(x)$ führt aus M heraus. (M ist außerdem nicht abgeschlossen.)

zu 2. Es gilt $g(x) = \frac{x^2+3}{4}$, $1 > g'(x) = \frac{x}{2} \geq 0 \; \forall x \in [0, 2]$, $g(0) = \frac{3}{4}, g(2) = \frac{7}{4} < 2$. Wählen $M = [0, 2]$. Dann $g : M \to M$ monoton wachsend und kontrahierend.

zu 3. Voraussetzungen des Banach-Fixpunktsatzes sind erfüllt, daraus folgt die Konvergenz.

zu 4. $x_0 = 0, x_1 = g(x_0) = 0.75, x_2 = g(x_2) = \frac{57}{64} = 0.890625$, $x_3 = \frac{15537}{16384}$

dieselbe Funktion, die Nullstelle $x_2 = 3$ soll jetzt approximiert werden

Es gilt

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \Longrightarrow \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} &= 0 \Longrightarrow \\ -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{3}{2} &= x \\ g'(x) &= -x + 3 \\ |g'(x)| &< 1 \Longrightarrow x \in (2, 4) \end{aligned}$$

Wählen $M = [2.5, 3.5]$, $\quad g(2.5) = \frac{23}{8} = g(3.5) \in M, \quad g(3) = 3 \in M$
$x_0 = \frac{5}{2}, \quad x_1 = \frac{23}{8} \ldots$

Beispiel zur Einfachen Iteration

13. $n = 1$, $f(x) = 2x - \log(x) - 7 = 0$, $\quad x^* \approx 4.2199$

$\phi(x) = x + f(x) = 3x - \log(x) - 7$, $\quad \phi'(x) = 3 - \frac{1}{x} > 1$, also nicht kontraktiv.

Lösen deshalb: $f(x) = -x + \frac{1}{2}(\log(x) + 7) = 0$, (Division durch -2)

$\phi(x) = \frac{1}{2}(\log(x) + 7)$, $\quad \phi'(x) = \frac{1}{2x} < 1$ für $x > \frac{1}{2}$

$x_0 = 4, x_1 = 4.19315, x_2 = 4.2173, x_3 = 4.21953$

14. Einfache Iteration: $n = 1$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = 0$

$\phi(x) = x + f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x$, $\quad |\phi'(x)| = |\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}| < 1$ falls $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$, also $x^2 > 2$ also $x > \sqrt{2}$ aber $x = \pm\sqrt{2}$ ist Lösung.

Alternative: $f(x) = x^2 - 2 = 0$ oder $g(x) = \frac{-x^2+2}{4} + x = x$

$g'(x) = -\frac{x}{2} + 1$, $|g'(x)| < 1$ gdw. $x \in (0, 4)$, $g(0) = g(4) = \frac{1}{2}$,
$g(2) = \frac{3}{2}$ (Maximum), $M = [0, 4]$ $g : M \to M$ kontrahierend.
Fixpunktiteration: $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0.9375, x_3 = 1.21777,$
$x_4 = 1.34703, x_5 = 1.39341, x_6 = 1.4081, x_7 = 1.41239$

Beispiele zur Modifizierten Einfachen Iteration

15. $n = 1,\ f(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + x, \quad x^* \approx 0.450184$

Im Vergleich zur vorigen Aufgabe Vorzeichen geändert!

f ist stetig differenzierbar. Wählen $M = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Nach dem Mittelwertsatz $\exists z \in M$:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq \sup|\frac{1}{2}\sin(x) + 1||x - y| \leq \frac{3}{2}|x - y|$$

$$(f(x) - f(y), x - y) = \frac{1}{2}\underbrace{(\cos(y) - \cos(x), x - y)}_{>0} + |x - y|^2 > |x - y|^2$$

$L = \frac{3}{2}$ und $\gamma = 1$: Damit $\beta \in (-\frac{8}{9}, 0)$ Wählen $\beta = -\frac{7}{8}$. Der Startwert kann beliebig in M gewählt werden, z.B. $x_0 = 0$.

$n = 1,\ f(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + x, \quad x^* \approx 0.450184$ (Fortsetzung)

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= x_0 - \frac{7}{8} f(x_0) = \frac{7}{16} \\
x_2 &= x_1 - \frac{7}{8} f(x_1) \approx 0.450981 \\
x_3 &= x_2 - \frac{7}{8} f(x_2) \approx 0.450131 \\
x_4 &= x_3 - \frac{7}{8} f(x_3) \approx 0.450187 \\
x_5 &= x_4 - \frac{7}{8} f(x_4) \approx 0.450183
\end{aligned}
$$

Wir können auch direkt zu einer modifizierten einfachen Iteration kommen: Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \Longleftrightarrow x + \beta f(x) = x \\ |1 + \beta f'(x)| &< 1 \Longleftrightarrow \\ -1 &< 1 + \beta(\frac{1}{2}\sin(x) + 1) < 1 \\ \frac{-2}{\frac{1}{2}\sin x + 1} &< \beta < 0 \\ -\frac{4}{3} &< \beta < 1 \end{aligned}$$

d.h. wir können $\beta = -1$ wählen. $|x + \beta f'(x)| < 1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

16. Modifizierte Einfache Iteration $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 1$

Nullstellen: 1, $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$.

Wir vermuten eine Nullstelle in $[2, 2.5]$ und versuchen β so zu finden, dass $\sup |1 + \beta f'(x)| < 1$, d.h. $-2 < \beta f'(x) < 0$.

$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1 < 0, f'(2) = -1, f'(2.5) = -4.75,$

$f''(x) = -6x + 6 = 0$ für $x = 1$, d.h. f' hat keinen relativen Extremwert in $[2, 2.5]$.

Bedingung: $-2 < \beta f'(x) = -4.75\beta < 0 \Longrightarrow \beta \in (0, \frac{2}{4.45})$.

Wählen $\beta = \frac{2}{5}$ und $x_0 = 2.5$.

$x_1 = x_0 + \beta f(x_0) = 2.5 + 0.4 \cdot f(2.5) = 2.35$

$x_2 = 2.35 + 0.4 \cdot f(2.35) = 2.45, \quad x_3 = 2.39; \quad x_4 = 2.43$

17. Newton-Verfahren, Nullstellen von $f(x) = x^4 - 16$, Startwert $x_0 = 4$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$x_0 = 4, \quad x_1 \approx 3.0625 \quad x_2 \approx 2.43614, \quad x_3 \approx 2.10377$

$x_4 \approx 2.00743, \quad x_5 \approx 2.0004$

18. Lineare Regression, Kleinste Quadrat Methode

Bestimmen Sie die lineare Regressionsfunktion zu den Punkten

$(0,3),(1,2),(3,6)$

gesucht sind a, b in $f(x) = a + bx$ so dass

$$\sum_{i=1}^{4}(y_i - f(x_i))^2 = (3-(a+b\cdot 0))^2 + (2-(a+b\cdot 1))^2 + (6-(a+3b))^2$$

minimal.

Ableiten nach a bzw. b und Nullsetzen liefert: $a = \frac{15}{7}$ und $b = \frac{8}{7}$.

19. Satz 12, Eigenschaften von kubischen Splines

Die Funktion $s(t)$ ist ein kubischer Spline gdw. $s(t)$ folgende Eigenschaften hat

- $s(t)$ ist stückweises Polynom vom Grad 3 auf $[t_i, t_{i+1})$.
- $s(t)$ ist zweimal stetig differenzierbar, d.h. $s(t) \in W_2(M)$.
- $s'''(t)$ ist Treppenfunktion mit Stufen in $t_1, \ldots, t_n$.

Beweis: Die Hinrichtung ist trivial. Rückrichtung? Zumindest folgt aus der dritten Eigenschaft für alle $t \in [t_i, t_{i+1})$ nacheinander

$$
\begin{aligned}
s_i'''(t) &= a_i \\
s_i''(t) &= a_i t + b_i \\
s_i'(t) &= \frac{1}{2} a_i t^2 + b_i t + c_i \\
s_i(t) &= \frac{1}{6} a_i t^3 + \frac{1}{2} b_i t^2 + c_i t + d_i
\end{aligned}
$$

und aus $s_i^{(k)}(t_{i+1}) = s_{i+1}^{(k)}(t_{i+1}) \quad k = 0, 1, 2$ ein lineares Gleichungssystem, deren Lösung dann zu der Spline-Formel führen sollte.

20. Satz 13 (Basisfunktionen)

Die Menge $\{1, t, t^2, t^3, (t - t_i)^3_+, i = 1, \dots, n\}$ bildet eine Basis für den Vektorraum $S(t_1, \dots, t_n)$ der Splinefunktionen mit Knoten in $t_1, \dots, t_n$.

Beweis:

- Wir zeigen zunächst, $S(t_1, \dots, t_n)$ ist Vektorraum.
  z.z: eine Linearkombination von Funktionen $s_1(t), s_2(t) \in S(t_1, \dots, t_n)$ ist wieder Splinefunktion. Das folgt direkt aus Satz 12:
  LK von Polynomen r-ten Grades sind Polynome r-ten Grades,
  LK von stetig diff.baren Funktionen sind stetig diff.bar
  LK von Treppenfunktionen mit denselben Stützstellen sind Treppenfunktionen mit denselben Stützstellen.

- Die Funktionen $1, t, t^2, t^3, (t-t_i)_+^3, i = 1, \ldots, n$ sind linear unabhängig
  z.z.: Aus $s(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \theta_i t^i + \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i (t-t_i)_+^{r-1} \equiv 0$ folgt
  $\theta_i = \vartheta_j = 0 \; \forall i = 1, \ldots, 4, \forall j = 1, \ldots, n.$
  Sei $t < t_0$: $s(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \theta_i t^i \equiv 0$. Dann $\theta_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 4$
  Sei $t \in [t_0, t_1]$: $s(t) = 0 + \vartheta_1 (t-t_0)^{r-1} \equiv 0$. Dann $\vartheta_1 = 0$.
  Nacheinander folgt für $t \in [t_{j-1}, t_j]$: $\vartheta_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n.$

21. Satz 14, Vektorraum $NS(t_1, \ldots, t_n)$

Der Vektorraum $NS(t_1, \ldots, t_n)$ der natürlichen Splinefunktionen mit Knoten in $t_1, \ldots, t_n$ ist ein Teilraum von $S(t_1, \ldots, t_n)$ und hat die Dimension n.

Beweis: Vektorraumeigenschaft analog zu $S(t_1, \ldots, t_n)$.

Die 4 Restriktionen ergeben sich nacheinander wie folgt:

- $s'''(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_3 = 0$
- $s''(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_2 = 0$
- $s'''(b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n \vartheta_j = 0$
- $s''(b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n \vartheta_j (b - t_j) = \sum_{j=1}^n \vartheta_j t_j = 0$

Beispiele zu Splines

22. Zeichnen Sie eine natürliche Splinefunktion $s(t)$ auf $[a, b] = [0, 4]$ mit Knoten in $t_i = i, i = 0, 1, 2, 3, 4$.

$s_1(t) = t_+^3 + (t-1)_+^3 - t_+^3 + (t-2)_+^3 + (t-3)_+^3 + (t-4)^3 \in S(0, 1, 2, 3, 4)$

bzw.

$s_2(t) = \frac{7}{12} t_+^3 - (t-1)_+^3 + \frac{1}{2}(t-2)_+^3 - \frac{1}{3}(t-3)_+^3 + \frac{1}{4}(t-4)^3$

$s_2(t)$ ist natürlicher Spline, da $\vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = 0$ und $\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + 3\vartheta_3 + 4\vartheta_4 = 0$

23. Zeichnen jeweils einer Splinefunktion und einer natürlichen Splinefunktion mit Knoten in -1,0,1

$s_1(t) = (t+1)_+^3 - t_+^3 + (t-1)_+^3 \in S(-1,0,1)$ bzw.

$s_2(t) = (t+1)_+^3 - 2t_+^3 + (t-1)_+^3 \in NS(-1,0,1)$

$s_2(t)$ ist natürlicher Spline, da $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 0$ und

$\sum_{j=1}^{3} \vartheta_j t_j = -\vartheta_1 + \vartheta_2 \cdot 0 + \vartheta_3 = -1 + 1 = 0$

Wenn wir jetzt noch fordern $s_1(t_1) = s_1(-1) = 1$, $s_1(t_2) = s_1(0) = 0$ und $s_1(t_3) = s_1(1) = 1$ so $s_1(t) = at^3 + bt^2 + ct + d + (t+1)_+^3 - t_+^3 + (t-1)_+^3$ mit einer Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
1 &= s_1(-1) = -a + b - c + d \\
0 &= s_1(0) = d + 1 \quad \Rightarrow d = -1 \\
1 &= s_1(1) = a + b + c + d + 2^3 + 1 \quad \Rightarrow b = \frac{7}{2}, \quad a + c = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

24. Zusatzaufgabe Zeigen Sie, $s(t) = \sum_{j=1}^{n+4} \beta_j x_j(t)$ aus dem Beweis von Satz 15 ist einziges Minimum

Hinweis: Nutzen Sie die Beziehung $A + B = 0$ aus dem Beweis von Satz 15

Beweis: Angenommen $s(t)$ und $s_1(t)$ sind Lösungen der Minimumaufgabe.

Aus der Ungleichung (vgl. Beweis von Satz 15)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (f''(t))^2\,dt \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - s(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (s''(t))^2\,dt$$

folgt dann

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - s(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (s''(t))^2\,dt = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - s_1(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (s_1''(t))^2\,dt.$$

Für die letzte Summe bzw. das letzte Integral gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(y_i - s_1(t_i))^2 &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - s(t_i) + s(t_i) - s_1(t_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i - s(t_i))^2 + \sum_{i=1}^{n}(s(t_i) - s_1(t_i))^2 + \\
&\quad 2\sum_{i=1}^{n}(s_1(t_i) - s(t_i)(s(t_i) - y_i) \\
\int_a^b (s_1''(t))^2\,dt &= \int_a^b (s_1''(t) - s''(t_i + s''(t_i))^2\,dt \\
&= \int_a^b (s_1''(t) - s(t))^2\,dt + \int_a^b (s''(t))^2\,dt \\
&\quad -2\int_a^b (s''(t))(s(t) - s_1(t))\,dt
\end{aligned}
$$

Wegen $A + B = 0$ (vgl. Beweis von Satz 15) sind die beiden Terme mit dem Faktor 2 zusammen gleich Null, woraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (s(t_i) - s_1(t_i))^2 &= 0 \\ \int_a^b (s_1''(t) - s(t))^2 \, dt &= 0 \end{aligned}$$

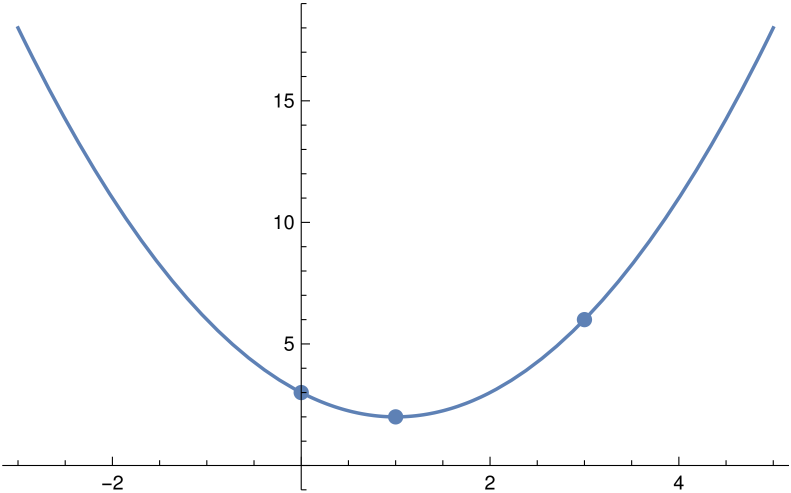
Aus der 2. Gleichung folgt $s_1''(t) = s''(t)$ f.ü., d.h. $s_1(t) - s(t)$ ist Polynom 2. Grades. Aus der 1. Gleichung folgt $s_1(t_i) = s(t_i) \quad \forall i - 1, \ldots, n$. Also $s_1(t) \equiv s(t)$. $\square$

25. Bestimmen Sie das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Punkten $(0,3),(1,2),(3,6)$

Bestimmen die Funktionen

$$\begin{aligned}
\omega_k(t) &= \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{t-t_j}{t_k-t_j} \\
\omega_0(t) &= \prod_{j=1}^{2} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \frac{(t-1)}{(0-1)}\frac{(t-3)}{(0-3)} = \frac{t^2-4t+3}{3} \\
\omega_1(t) &= \prod_{j=0,j\neq 1}^{2} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \frac{(t-0)}{(2-0)}\frac{(t-3)}{(2-3)} = \frac{-t^2+3t}{2} \\
\omega_2(t) &= \prod_{j=0}^{1} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \frac{(t-0)}{(3-0)}\frac{(t-1)}{(3-1)} = \frac{t^2-t}{6}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_n(t) &= \sum_{k+0}^{n} \omega_k(t) f_k \\
&= 3\omega_0(t) + 2\omega_1(t) + 6\omega_2(t) \\
&= 3\frac{t^2 - 4t + 3}{3} + 2\frac{-t^2 + 3t}{2} + 6\frac{t^2 - t}{6} \\
&= (t^2 - 4t + 3) + (-t^2 + 3t) + (t^2 - t) = t^2 - 2t + 3
\end{aligned}
$$


15
10
5
−2
2
4

26. Bestimmen Sie numerisch das Integral

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx \qquad (= 1)$$

numerisch bis auf drei signifikante Stellen, nach der Trapezregel und nach der Simpsonregel

Anzahl der Teilintervalle	Approximation Trapezregel	Simpsonregel
1	1.1752	1.00789
2	1.04972	1.00081
4	1.01304	
8	1.00331	

siehe Computeralgebra (TrapezSimpson.nb).

Die ersten Einträge stehen auf der folgenden Seite.

Trapezregel

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{e-1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right) \approx 1.1752 \\
I_2 &= \frac{e-1}{4}\left(1+2\frac{1}{\frac{e+1}{2}}+\frac{1}{e}\right) \approx 1.04972 \\
I_3 &= \frac{e-1}{8}\left(1+2\frac{1}{1+\frac{e-1}{4}}+2\frac{1}{\frac{e+1}{2}}+2\frac{1}{1+3\frac{e-1}{4}}+\frac{1}{e}\right) \approx 1.01304 \\
I_4 &= 1.00331
\end{aligned}
$$

Simpsonregel

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{e-1}{6}\left(1+4\frac{1}{\frac{e+1}{2}}+\frac{1}{e}\right) \approx 1.00789 \\
I_2 &= \frac{e-1}{12}\left(1+4\frac{1}{1+\frac{e-1}{4}}+2\frac{1}{\frac{e+1}{2}}+4\frac{1}{1+3\frac{e-1}{4}}+\frac{1}{e}\right) \approx 1.00081
\end{aligned}
$$

27. Beweis der Folgerung Ereignisfeld

1.

$$\begin{aligned} A_i \in \mathcal{E}, \quad \forall i \in \mathbf{N} \quad &\Longrightarrow \quad \overline{A_i} \in \mathcal{E}, \quad \forall i \in \mathbf{N} \quad \text{(Def. 17.3)} \\ &\Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{E} \quad \text{(Def. 17.2)} \\ &\Longrightarrow \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \in \mathcal{E} \quad \text{(de Morgan)} \\ &\Longrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E} \quad \text{(Def. 17.3)} \end{aligned}$$

2. Nach Def. 17.1 gilt: $\Omega \in \mathcal{E}$. Wegen $\emptyset = \overline{\Omega}$ und Def. 17.3 folgt dann: $\emptyset \in \mathcal{E}$.

28. Zeigen Sie, die Laplace-Wahrscheinlichkeit ist Wahrscheinlichkeit.

Sei $A \in \mathcal{E}$.

$$P(A) = \frac{\#\{\omega, \omega \in A\}}{N} = \frac{\#\text{für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\#\text{möglichen Elementarereignisse}}$$

- Offenbar $0 \le P(A) \le 1$ und $P(\Omega) = 1$.
- Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte Ereignisse. Dann

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_i A_i\Big) &= \frac{\#\text{für eines der } A_i \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\#\text{möglichen Elementarereignisse}} \\ &= \sum_i \frac{\#\text{für } A_i \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\#\text{möglichen Elementarereignisse}} \\ &= \sum_i P(A_i) \end{aligned}$$

(Summe ist endlich, da es nur endlich viele Elementarereignisse gibt.)

29. $\Omega = [0,1]$, $A \subseteq \Omega$

Zeigen Sie, $P\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $P(A) := \int\limits_A dx$ ist Wahrscheinlichkeit.

Seien $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt.

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(A) \leq 1 \\ P(\Omega) &= \int_0^1 dx = 1 \\ P\Big(\bigcup A_i\Big) &= P(A) = \int_A dx = \int_{\bigcup A_i} dx = \sum_i \int_{A_i} dx = \sum_i P(A_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right]\right) &= \tfrac{1}{4} \\ P\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = 0 \end{aligned}$$

30. Kombinatorik 1

Es seien A und B Ereignisse mit $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß genau eines dieser Ereignisse eintritt!

$$\begin{aligned} P(A, \overline{B}) &= P(A) - P(A, B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ P(\overline{A}, B) &= \frac{1}{6} \\ P(A, \overline{B}) + P(\overline{A}, B) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

31. Wir spielen mit drei Würfeln. Welche Augensumme ist wahrscheinlicher, 11 oder 12?

11	Anzahl	12	Anzahl
6-4-1	6	6-5-1	6
6-3-2	6	6-4-2	6
5-4-2	6	6-3-3	3
5-5-1	3	5-5-2	3
5-3-3	3	5-4-3	6
4-4-3	3	4-4-4	1
Summe:	27		25

32. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach zweimaligem Würfeln die Augensumme mindestens 7 beträgt?

Anzahl der möglichen Elementarereignisse: $6^2 = 36$

Anzahl der ungünstigen Elementarereignisse: $6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 15$

$$P(A) = \frac{36 - 15}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Menge der Komplementärereignisse:

$\overline{A} = \{1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-3, 4-1, 4-2, 5-1\}$

33. Drei Personen steigen im Erdgeschoss in den Fahrstuhl ein und in einer der vier Etagen zufällig und unabhängig voneinander wieder aus.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle Personen in der vierten Etage aussteigen? $P(A) = \frac{1}{4^3}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle Personen in der gleichen Etage aussteigen? $P(B) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in irgendeiner Etage genau zwei Personen aussteigen?

$P(C) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot 4}{4^3} = \frac{9}{16}$

2 von 3 Personen steigen in der ersten Etage aus

1 Person in der 2.-4. Etage

4 Etagen gibt es wo 2 Personen aussteigen können.

34. Lotto 6 aus 49

Wenn wir uns die Zahlen als Kugeln denken, die aus einer Urne entnommen werden, und außerdem gezogene Zahlen im nachhinein als schwarze Kugeln ansehen, so kann jeder Tip durch die Entnahme von 6 Kugeln verkörpert werden. A: Ereignis , daß vier Richtige getippt werden.

$n = 49, \quad n_1 = 6, \quad k = 6, \quad k_1 = 4,$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{49-6}{6-4}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{54201} \approx 1.84 \cdot 10^{-5}$$

35. 5 mal Würfeln. Wahrscheinlichkeit, dass die größte Augenzahl ist exakt 4?

Ereignisse:

A: größte Augenzahl exakt 4

B: größte Augenzahl ≤ 4

C: größte Augenzahl ≤ 3

$$P(A) = P(B) - P(C) = \left(\frac{4}{6}\right)^5 - \left(\frac{3}{6}\right)^5 = \frac{1024-243}{7776} = \frac{781}{7776} \approx 0.1$$

36. Betrachten eine Urne mit 3 weißen, 3 schwarzen und 3 roten Kugeln. Wir entnehmen (blind) 4 Kugeln. Sei A das Ereignis, dass von jeder Farbe mindestens eines dabei.

$$P(A) = 3 \cdot \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{9}{14}$$

3 Möglichkeiten, die Farbe auszuwählen, die zweimal vorkommt

$\binom{3}{2}$ Möglichkeiten Kugen dieser Farbe auszuwählen

jeweils $\binom{3}{1}$ Möglichkeiten Kugen der anderen Farben auszuwählen

mit Zurücklegen: multinomiale Wahrscheinlichkeit

$P(B) = \sum \frac{4!}{i_1!i_2!i_3!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} p_3^{i_3}$ wobei die Summe gebildet wird über alle Tripel (i_1, i_2, i_3) mit $1 \leq i_j \leq 3$ und $i_1 + i_2 + i_3 = 4$.

$P(B) = 3 \frac{4!}{1!1!2!} \frac{1}{3}^4 = \frac{4}{9}$

37. Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit, Elfmeterschießen

Schütze schießt mit Wahrscheinlichkeit

0.45 nach links
0.45 nach rechts
0.1 in die Mitte

Torwart fliegt mit Wahrscheinlichkeit

0.4 nach links
0.4 nach rechts
0.2 bleibt stehen

Wir nehmen an, Schütze und Torwart verhalten sich unabhängig voneinander und ein Tor fällt genau dann wenn Schütze und Torwart verschiedene Richtungen wählen.

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Tor fällt?
- Angenommen, ein Tor ist gefallen. Wohin wurde mit welcher Wahrscheinlichkeit geschossen?

$$P(\text{kein Tor}) = 0.45 \cdot 0.4 + 0.45 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.38$$

$$\begin{aligned}
P(L|\text{Tor}) &= \frac{P(\text{Tor}|L)P(L)}{P(\text{Tor})} = \frac{0.6 \cdot 0.45}{0.62} = \frac{27}{62} \\
P(R|\text{Tor}) &= \frac{P(\text{Tor}|R)P(R)}{P(\text{Tor})} = \frac{0.6 \cdot 0.45}{0.62} = \frac{27}{62} \\
P(M|\text{Tor}) &= 1 - 2 \cdot \frac{27}{62} = \frac{8}{62}
\end{aligned}$$

38. Sei $X \sim Geo(p)$. Zeigen Sie

- Die geometrische Wahrscheinlichkeit ist eine Wahrscheinlichkeit
- $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$
- $\mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Hinweis: $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2}$

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Beweis des vorletzten Gleichheitszeichens:

a) durch vollst. Induktion

b) Differenzieren der geometrischen Reihe

39. Modellbildung 1

1. An eine Rechenanlage werden Jobs übermittelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Übermittlung einens Jobs fehlschlägt beträgt 0.6 und ist unabhängig vom Erfolg oder Misserfolg der anderen Übermittlungen. Sei X die zufällige Anzahl der Übertragungsversuche bis eine erfolgreiche Übermittlung erfolgt.

   $X \sim$

2. An einer Tankstelle kommen zwischen 9:00 und 11:00 im Mittel 3 Fahrzeuge pro Minute an. Sei Y die zufällige Anzahl der in diesem Zeitraum ankommenden Fahrzeuge.

   $Y \sim$

40. Modellbildung 2

Finden Sie geeignete Modelle für folgende Problemstellungen:

- Sei Z_1 die zufällige Lebensdauer einer Glühlampe
- Sei Z_2 die Laufzeit eines zufällig herausgegriffenen Sportlers beim Marathonlauf.
- Sei Z_3 die zufällige Anzahl der Punkte eines Spielers bei einem 9rundigen Schachturnier, wobei wir annehmen, dass alle Spieler gleich stark sind und das Remispartien solange wiederholt werden, bis einer der Spieler gewinnt.
- Sei Z_4 die zuällige Weite eines Speerwerfers beim Olympischen Wettkampf.

41. zu Aufgabe 40, Z_3 wenn Remispartien erlaubt

Sei X_i der zufällige Ausgang der i-ten Partie und X die zufällige Gesamtpunktzahl (Normalverteilung approximativ nach ZGWS)

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad X = \sum_{i=1}^{9} X_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{E}(X), var(X)) = \mathcal{N}(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \frac{9}{2} \\
\mathbf{E}(X^2) &= \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{9} X_i)^2 = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{9} X_i^2) + \mathbf{E}\sum_{i\neq j} X_i X_j \\
&= \sum_{i=1}^{9} \mathbf{E}X_i^2 + \sum_{i\neq j} \mathbf{E}X_i \mathbf{E}X_j = 9(\frac{0}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{72}{4} = \frac{15}{4} + 18 \\
\mathrm{var}X &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{15}{4} + 18 - \frac{81}{4} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

42. Modellbildung 3

Aus einer großen Bibliothek mit einem Bestand von $N = 10^6$ Büchern verschwindet im Laufe des Jahres eine gewisse Anzahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebenes Buch verschwindet sei $q = 0.0001$. Wir nehmen an, die Bücher verschwinden unabhängig voneinander.

1) Finden Sie ein geeignetes Modell für die zufällige Anzahl X der im Laufe des Jahres verschwindenden Bücher.

$X \sim$

$$\begin{aligned} E(X) &= 100 \\ \mathrm{var}(X) &= nq(1-q) \approx 10^6 \cdot 10^{-4} = 100 \end{aligned}$$

43. Modellbildung 4

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Laufe des Jahres mehr als 110 Bücher verschwinden?

$$P(X > 110) = P(\frac{X - 100}{10} \geq \frac{110 - 100}{10}) \approx 1 - \Phi(1)$$

3) Angenommen, es sind im Laufe des Jahres n=100 Bücher verschwunden. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Verschwinden eines gegebenen Buches bemerkt wird, sei $p = \frac{1}{4}$. Finden Sie ein geeignetes Modell für die zufällige Anzahl Y der Bücher, deren Verschwinden entdeckt wird.

$Y \sim$

44. Modellbildung 5

4) Es werden regelmäßig Revisionen zu festen Zeitpunkten gemacht. Angenommen ein gegebenes Buch ist verschwunden. Finden Sie ein geeignetes Modell für die zufällige Anzahl Z der Revisionen bis das Verschwinden des Buches erstmals bemerkt wird.

$Z \sim$

45, Zusatzaufgabe Beweisen Sie die 2. Chernov-Ungleichung

Hinweis: Analog zur ersten Ungleichung. Beachte $e^{-x} > 1 - x$ $\forall x \neq 0$ folgt $\forall t > 0$