Aufgabe 3: 4+6+8+8=26 Punkte

a) Bestimmen Sie die absoluten und relativen Konditionen folgender Funktionen.

1. $f(x) = x^2$

   $\kappa_{\text{abs}} =$

   $\kappa_{\text{rel}} =$

2. $g(x) = x^2 - 1$

   $\kappa_{\text{abs}} =$

   $\kappa_{\text{rel}} =$

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \qquad \text{Startwert: } x_0 = 2$$

Geben Sie die exakte Lösung an.

$x_0 = 2$ $\qquad$ $x_{n+1} =$

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

Exakte Lösung: $x^* =$

c) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Jacobi-Verfahren und vergleichen Sie mit der exakten Lösung. Der Startwert sei $x_0 = (0, 0)'$. Führen Sie drei Iterationen durch.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}_0 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbf{x}_{n+1} =$

$\mathbf{x}_1 \quad =$

$\mathbf{x}_2 \quad =$

$\mathbf{x}_3 \quad =$

d) Bestimmen Sie numerisch das folgende Integral

$$I := \int_0^1 (x^2 - x)\, dx$$

1. mit der Trapezregel, Zerlegung in 1, 2 und 4 Teilintervalle.

$I_1 \quad =$

$I_2 \quad =$

$I_4 \quad =$

2. mit der Simpsonregel, nur Intervall $[0, 1]$.

$I_1 =$

Geben Sie die exakte Lösung an.

$I =$

Aufgabe 4: 4+5+8+7=24 Punkte

a) Von den Angestellten eines Betriebes geben 60% der Frauen und 80% der Männer an, Sport zu treiben. Die Anzahl männlicher und weiblicher Angestellter steht dabei im Verhältnis 3:2.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Angestellter Sport treibt?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Angestellter der Sport treibt, weiblich ist?

b) Finden Sie für die folgenden Problemstellungen jeweils ein geeignetes Modell

1. An eine Rechenanlage werden Jobs übermittelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Übermittlung einens Jobs fehlschlägt beträgt 0.6 und ist unabhängig vom Erfolg oder Misserfolg der anderen Übermittlungen. Sei X die zufällige Anzahl der Übertragungsversuche bis eine erfolgreiche Übermittlung erfolgt.

   $X \sim$

2. An einer Tankstelle kommen zwischen 9:00 und 11:00 im Mittel 3 Fahrzeuge pro Minute an. Sei Y die zufällige Anzahl der in diesem Zeitraum ankommenden Fahrzeuge.

   $Y \sim$

3. Sei Z die zufällige Lebensdauer einer Glühlampe.

   $Z \sim$

4. Wir nehmen an, alle Ziffern einer Telefonnummer haben die gleiche Wahrscheinlichkeit. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer siebenstelligen Telefonnummer keine Ziffer mehr als einmal vorkommt.
   Hinweis: Es gilt: $32 \cdot 27 \cdot 7 = 6048$

c) Bestimmen Sie jeweils Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen

1.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \\ \mathrm{Var}(X) &= \end{aligned}$$

2. $Y \sim f$ mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x) & \text{falls } \; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \\ \mathrm{Var}(X_i) &= \end{aligned}$$

d) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}(X_i) = 0$ und $\mathrm{Var}(X_i) = 1$.

1. Zeigen Sie

$$P(|X_i| \geq 2) \leq \frac{1}{4}$$

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\sum_{i=1}^{100} X_i \in (-10, 10)$ approximativ.

   Hinweis: Es gilt $\Phi(1) = 0.8413$, wobei Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ist.