Nach- und Wiederholungsklausur (23. Oktober 2020)

Aufgabe 1: 4+4+6+6=20 Punkte

a) Bestimmen Sie die Kondition folgender Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie die Spaltensummennorm.

$$||A|| =$$

$$A^{-1} =$$

$$||A^{-1}|| =$$

$$\mathrm{cond}(A) =$$

b) Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren die positive reelle Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3$$

Starwert sei $x_0 = 1$. Geben Sie die ersten drei Iterierten an. Berechnen Sie die Brüche und kürzen sie soweit wie möglich.

$x_0 = 1$ $\qquad$ $x_{n+1} =$

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

c) Bestimmen Sie mit (modifizierter) Einfacher Iteration die im Intervall $M = [0, 3]$ liegende Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3. \qquad\qquad \text{Startwert: } x_0 = 1.$$

Wählen Sie $\beta = -\frac{1}{3}$ und betrachten Sie die Funktion $g(x) = \beta f(x) + x = -\frac{1}{3}x^2 + 1 + x$.

1. Zeigen Sie, die Abbildung $g(x)$ ist im Innern von M, d.h. im Intervall $(0, 3)$, kontraktiv.

2. Zeigen Sie, $g(x) \in M \quad \forall x \in M$.

3. Geben Sie die ersten zwei Iterierten an. Berechnen Sie die Brüche und kürzen sie soweit wie möglich.

$x_0 = 1 \qquad\qquad x_{n+1} =$

$x_1 =$

$x_2 =$

d) Bestimmen Sie numerisch das folgende Integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx,$$

wobei π die Kreiszahl ist. Geben Sie den vollständigen Rechenweg an und kürzen Sie die Brüche jeweils so weit wie möglich. Sollte in den Formeln die Zahl π oder irrationale Wurzelausdrücke auftreten, dürfen Sie diese stehen lassen.

1. mit der Trapezregel, Zerlegung jeweils in 1 und 2 Teilintervalle.

$$I_1 =$$

$$I_2 =$$

2. mit der Simpsonregel, nur Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$I_1 =$$

Geben Sie die exakte Lösung an.

$$I =$$

Hinweise: Es gilt: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \pi(1+\sqrt{2}) \approx 7.58$, $\quad \pi(1+2\sqrt{2}) \approx 12.03$

Aufgabe 2: 4+5+8+3=20 Punkte

a) Im Land DOPE werden drei Sportarten betrieben, Leichtathletik, Radsport und Schwimmen. Im Nationalkader seien 1000 Sportler, 700 Leichtathleten, 200 Radsportler und 100 Schwimmer. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Leichtathlet gedopt ist sei 0.6, bei einem Radsportler 0.9 und bei einem Schwimmer 0.3.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Sportler gedopt ist. Geben Sie das Ergebnis auf 2 Stellen nach dem Komma an.

2. Angenommen ein Sportler stellt sich als gedopt heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit betreibt er Radsport? Kürzen Sie den Bruch soweit wie möglich.

b) Es sei die folgende Funktion gegeben: $f(x) = c \cdot \begin{cases} \cos(x) & \text{falls} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

1. Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f(x)$ Dichte einer Zufallsvariablen X ist.

2. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X

   $\mathbf{E}(X) =$

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

   $P(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}) =$

Hinweis: Es gilt: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$.

c) Finden Sie zu folgenden Fragestellungen jeweils ein geeignetes Modell. Spezifizieren Sie die Parameter so weit wie möglich.

1. Zufällige Messung X_1 einer physikalischen Konstanten g, wobei wir annehmen, dass der wahre Wert $g = 9.81$ beträgt.

   $X_1 \sim$

2. Zufällige Anzahl X_2 der in der Hauptverkehrszeit auf einem gegebenen Autobahnabschnitt im Stau stehenden Autos.

   $X_2 \sim$

3. Zufällige Anzahl X_3 der Würfe mit einem gewöhnlichen Spielwürfel bis eine Sechs kommt.

   $X_3 \sim$

4. Eine Figur bewegt sich auf der Zahlengeraden in ganzzahligen Schritten mit Wahrscheinlichkeit p nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ nach links. Wir nehmen an, die Figur startet im Nullpunkt und führt 10 zufällige Schritte, unabhängig voneinander, aus. Sei X_4 die zufällige Anzahl der Schritte die die Figur in positiver Richtung (also nach rechts) geht.

   $X_4 \sim$

5. (+2 P.) Betrachten sie die Figur aus 4. Sei X_5 die zufällige *Position* der Figur auf der x-Achse. Sie dürfen bei der Beschreibung die Zufallsvariable X_4 verwenden.

   $X_5 =$

d) Sei X eine stetige Zufallsvariable mit $f(x) > 0$ für $x \in (0,1)$ und $f(x) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass

d1) $\mathbf{E}(X) < 1$

d2) $\mathbf{E}X^4 \geq (\mathbf{E}(X^2))^2$