Humboldt-Universität zu Berlin
Vorlesung: Angewandte Mathematik für die Informatik, SS 2020
PD Dr. L. Popova-Zeugmann, PD Dr. W. Kössler

Klausur (17. August 2020)

Aufgabe 1: 4+3+7+6=20 Punkte

a) Bestimmen Sie die absolute und relative Kondition folgender Abbildung

$$f(x) = \cos(x) - 1$$

$$\kappa_{\text{abs}}(x) \quad =$$

$$\kappa_{\text{rel}}(x) \quad =$$

$$\lim_{x \to 0} \kappa_{\text{rel}}(x) \quad =$$

b) Bestimmen Sie eine Regressionsgerade durch die vier Punkte (-2,1), (-1,1), (1,0) und (2,0).

c) Bestimmen Sie mit (modifizierter) Einfacher Iteration die im Intervall $M = [0, 2]$ liegende Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - 2. \qquad \text{Startwert: } x_0 = 1.$$

Wählen Sie $\beta = -\frac{1}{2}$ und betrachten Sie die Funktion $g(x) = \beta f(x) + x = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + x$.

1. Zeigen Sie, die Abbildung $g(x)$ ist im Innern von M, d.h. im Intervall $(0, 2)$, kontraktiv.

2. Zeigen Sie, $g(x) \in M \quad \forall x \in M$.

3. Geben Sie die ersten drei Iterierten an. Kürzen Sie die Brüche soweit wie möglich.

$x_0 = 1$ $\qquad\qquad$ $x_{n+1} =$

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

Hinweis: Es gilt: $\frac{183}{128} \approx 1.42968$.

d) Bestimmen Sie numerisch das folgende Integral

$$I = \int_e^{2e} \frac{1}{x}\, dx,$$

wobei e die Eulersche Zahl ist. Kürzen Sie die Brüche jeweils so weit wie möglich.

1. mit der Trapezregel, Zerlegung jeweils in 1 und 2 Teilintervalle.

$$I_1 \quad =$$

$$I_2 \quad =$$

2. mit der Simpsonregel, nur Intervall $[e, 2e]$.

$$I_1 =$$

Geben Sie die exakte Lösung an.

$$I =$$

Hinweis: Es gilt: $\ln 2 \approx 0.693$.

Aufgabe 2: 4+5+8+3=20 Punkte

a) Eine Figur bewegt sich zwischen zwei Zuständen Z_1 und Z_2. Für $i, j = 1, 2$ sei

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{falls} \quad i = j \\ \frac{2}{3} & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases}$$

die Übergangswahrscheinlichkeit in einem Schritt von Zustand Z_i nach Zustand Z_j zu kommen.

Sei S_i das Ereignis, dass die Figur in Zustand Z_i startet, und E_j das Ereignis, dass die Figur sich nach einem Schritt in Zustand Z_j befindet. Weiter sei $q_1 = P(S_1) = \frac{5}{6}$ und $q_2 = P(S_2) = \frac{1}{6}$.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Figur nach einem Schritt in Zustand Z_1?

   $P(E_1) =$

2. Angenommen, die Figur ist nach einem Schritt in Zustand Z_2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie in Zustand Z_1 gestartet?

   $P(S_1|E_2) =$

b) Es sei die folgende Funktion gegeben: $f(x) = c \cdot \begin{cases} \sin(x) & \text{falls} \quad x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

1. Bestimmen Sie die Konstante c so dass $f(x)$ Dichte einer Zufallsvariablen X ist.

2. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X

   $\mathbf{E}(X) =$

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

   $P(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}) =$

Hinweis: Es gilt: $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Finden Sie zu folgenden Fragestellungen jeweils ein geeignetes Modell. Spezifizieren Sie die Parameter so weit wie möglich.

1. Zufällige Weite W eines Weltklasse-Speerwerfers, wobei wir annehmen, dass seine mittlere Weite 80m beträgt.

   $W \sim$

2. Zufällige Anzahl schwarzer Bildpunkte in einem 100x100 Quadrat, wobei wir annehmen, dass alle Bildpunkte unabhängig voneinander erzeugt werden und ein Bildpunkt mit Wahrscheinlichkeit 0.37 schwarz ist.

   $X \sim$

3. Zufällige Lebensdauer Y eines elektronischen Bauelements.

   $Y \sim$

4. Zufällige Anzahl Z der Würfe mit einer fairen Münze bis Zahl kommt, wobei wir annehmen, dass alle Würfe unabhängig voneinander erfolgen.

   $Z \sim$

d) Es seien $Z_i \sim R(0, 100)$, $i = 1, \ldots, n$, n=300 auf dem Intervall (0,100) unabhängige und gleichverteilte Zufallszahlen. Diese werden jedoch auf ganze Zahlen gerundet, so dass jeweils ein Rundungsfehler U_i, $U_i \sim R(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entsteht. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gerundeten Werte um weniger als 10 von der wahren Summe $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ abweicht

$$P(\left|\sum_{i=1}^{n} U_i\right| < 10) \quad =$$

$$\approx$$

Hinweise:

- Die Varianz einer auf dem Intervall $[a, b]$ gleichverteilten Zufallszahl X ist var $X = \frac{b-a}{12}$.
- Es gilt: $\Phi(2) \approx 0.9772$, wobei Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen ist.