3. Rechnerpraktikum

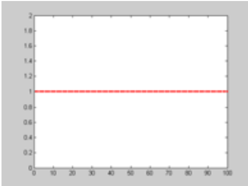
Ausgleichsrechnung

3.1 Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate

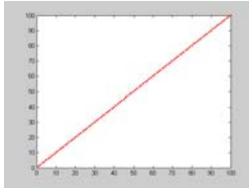
- Orthogonale Funktionen sind für die Signalverarbeitung, Elektrotechnik, ... von besonderer Bedeutung
- Orthogonale Funktionen sind Anwendung des Prinzips der kleinsten Fehlerquadrate

Problem

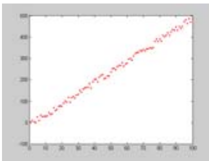
- Eine Funktion f(t) soll durch eine Funktion $f_a(c,t)$ so gut wie möglich angenähert werden, wobei c ein Parametersatz ist, der so festgelegt werden soll, dass eine „beste“ Annäherung erreicht wird.



1. Basisfunktion



2. Basisfunktion



Messung

Kleinster quadratischer Fehler

- Fehlermaß wie folgt definiert

$$E^2(c) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f_a(c,t)]^2 \, dt$$

$$E^2(c) = \sum_{n=0}^{N-1} [f_n - f_a(c,t_n)]^2$$

f_n Abtastwertesatz
$f_a(c,t)$ Approximationsfunktion

Ansatz für f_a

- Linearkombination eines Satzes von M Funktionen

$$f_a(c,t) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_m(t)$$

Die M Parameter sind so zu wählen, dass E^2 minimal wird.

Bestimmen des Minimums

- Bei N Abtastwerten gilt:

$$E^2(c) = \sum_{n=0}^{N-1} [f_n - \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_{m,n}]^2$$

$$\phi_{m,n} = \phi_m(t_n)$$

Minimum wird ermittelt durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach den Parametern c_k

Bestimmen des Minimums

$$E^2 = \sum_{n=0}^{N-1} [f_n - \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_{m,n}]^2$$

$$E^2 = \sum_{n=0}^{N-1} [f_n^{\,2} - 2 f_n \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_{m,n} + \left(\sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_{m,n} \right)^2]$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial c_k} = 0$$

Minimum wird ermittelt durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach den Parametern c_k

Bestimmen des Minimums

$$E^2 = \sum_{n=0}^{N-1} [f_n^{\,2} - 2 f_n \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_{m,n} + \left(\sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_{m,n} \right)^2]$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial c_k} = -2 \sum_{n=0}^{N-1} f_n \phi_{k,n} + 2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_{k,n} \phi_{m,n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_{k,n} \phi_{m,n} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \phi_{k,n}$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} (c_m \sum_{n=0}^{N-1} \phi_{k,n} \phi_{m,n}) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \phi_{k,n}$$

Matrixschreibweise

$$\sum_{m=0}^{M-1}(c_m \sum_{n=0}^{N-1}\phi_{k,n}\phi_{m,n}) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \phi_{k,n}$$

Eine solche Gleichung ergibt sich für jeden Koeffizienten c_k

Lineares Gleichungssystem mit M Unbekannten!

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1}\phi_{0,n}\phi_{0,n} & \cdots & \sum_{n=0}^{N-1}\phi_{0,n}\phi_{M-1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{N-1}\phi_{M-1,n}\phi_{0,n} & \cdots & \sum_{n=0}^{N-1}\phi_{M-1,n}\phi_{M-1,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1}\phi_{0,n} f_n \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{N-1}\phi_{M-1,n} f_n \end{bmatrix}$$

Anmerkungen

- Wenn N=M, dann existiert genau eine Lösung mit $E^2=0$
- Wenn N<M, existieren verschiedene Lösungen mit $E^2=0$
- Wenn N>M, dann i.d.R. $E^2>0$

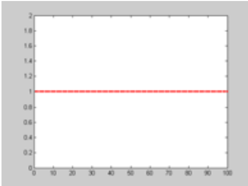
siehe Stearns: „Digitale Verarbeitung analoger Signale".

Gegeben:

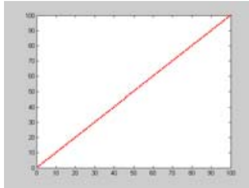
- das gemessene Signal für n diskrete Zeitpunkte
- n Funktionswerte einer oder mehrerer Basisfunktionen für all diese Zeitpunkte

Gesucht:

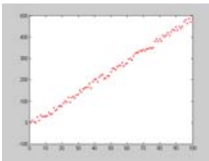
- ein Faktor für jede Basisfunktion, so dass Fehler minimal wird



1. Basisfunktion



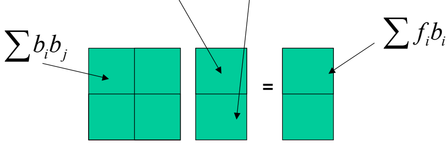
2. Basisfunktion



Messung

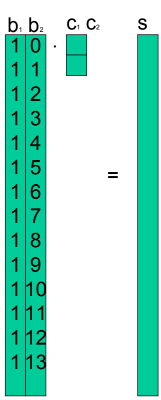
Lösungsschema

$$g(x_i) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x$$

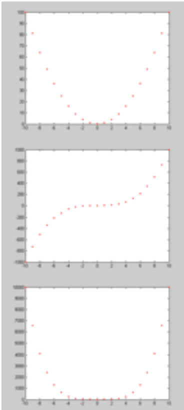


Näherungsrechnung durch Lösen dieses Gleichungssystems

Mit Matlab



[b1 b2] \ s = ?



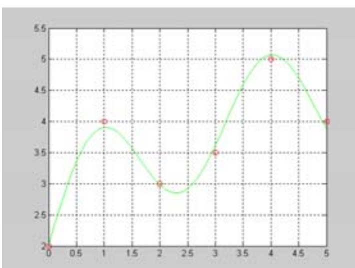
Spezialfall:

Polynominterpolation

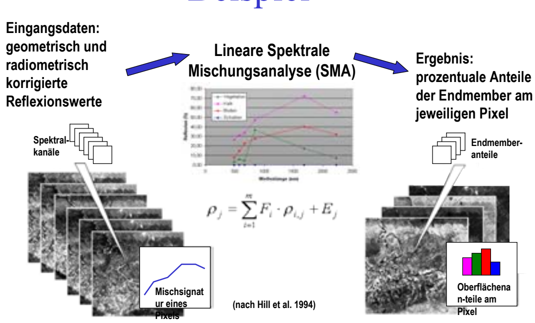
polyfit berechnet Koeffizienten
polyval berechnet den Wert

N-ter Grad wird durch N+1 Stützstellen vollständig bestimmt

Aufgabe 2.3



Beispiel



```
function L=linear(x,y)
```