Definition

1. $ord\ G = card\ G$ (Anzahl der Elemente in G)
2. $a \in G : n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$
   $a^{-n} := (a^n)^{-1}$
   $a^0 := e$
   $\langle a \rangle := \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ zykl, Untergruppe in G, generiert durch a
   $ord\ a := ord\ \langle a \rangle = card\ \langle a \rangle =$ Anzahl der Elemente der Menge $\{a^n : n \in \mathbb{Z}$

Satz

1. $ord\ a < \infty$ gdw. $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = e$
   Dann ist $ord\ a = \min\{n \in \mathbb{N} : a^n = e\}$
2. $ord\ a < \infty \Rightarrow \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \cdots, a^{ord\ a-1}\}$
3. $ord\ a < \infty \Rightarrow a^k = a^l$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ gdw. $k = l(modord\ a)$
4. $ord\ a < \infty \Rightarrow a^k = e$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gdw. $ord\ a|k$

Beispiel

$G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit klass. Multiplikation
$ord\ e^{i2\pi\varphi} < \infty$ gdw $\varphi \in \mathbb{Q}$
$\left(e^{2\pi i \frac{m}{n}}\right)^n = e^{2\pi i \frac{m}{n} n} = e^{2\pi i m} = 1$
$\left(e^{2\pi i\varphi}\right)^n = 1 = e^{2\pi e\varphi n} \Leftrightarrow 2\pi i\varphi n = 2k\pi i \Leftrightarrow \varphi = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$

Satz von Lagrage

Sei $ord\ G < \infty$, H Untergruppe von G $\Rightarrow ord\ H|ord\ G$

Definition: Normalteiler

Untergruppe U in G heißt Normalteiler, wenn für alle $a \in G : aH = Ha := \{ba : b \in H\}$

Beispiele

1. G kommutativ $\Rightarrow$ jede UG ist NT
2. $G := O(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) : \det A = 1\} = \{A \in \mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) : \langle An, Av \rangle = \langle n, v \rangle\ \forall n, v \in \mathbb{R}^2\}$
   $= \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\}}_{\det=1} \cup \{J \cdot A_\varphi : \varphi \in \mathbb{R}\}$ $J := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Spiegelung an der Abszissen-Achse. $J^2 = I$

   $H = \{I, J\}$ ist nicht NT: $A\varphi J = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$
   $\boxed{JA_\varphi = A_{-\varphi}J}$

Satz und Definition: Faktorgruppe

Sei H NT in G, dann gilt:

1. $a \equiv b(\mod H), a' \equiv b'(\mod H) \Rightarrow a \cdot a' \equiv b \cdot b'(\mod H)$
2. $\frac{G}{H} := \{[a]_H : a \in G\}$ ist eine Gruppe bzgl. $[a]_H[b]_H := [ab]_H$

Beispiel

$G = (\mathbb{Z}, +)$ $H = m\mathbb{Z}$
$k \equiv l(\mod H) \Leftrightarrow k \cdot l \in m\mathbb{Z} \Leftrightarrow k \equiv l(\mod m)$
$\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_m$