Satz

1. Es gilt stets $g_j \leq a_j$.
2. Es gilt $g_j = a_j$ genau dann, wenn $\ker(A - \lambda_j I) \geq \ker(A - \lambda_j I)^2$
   Dann heißt λ_j halbeinbfach
   Insbesondere sind einfache EW auch halbeinfach.

Beispiel

$n = 2$ $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], det(A - \lambda I) = det \left[\begin{smallmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{smallmatrix}\right] = (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, a = 2$

$0 = (A - 1 \cdot I)v = \left[\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] \Leftrightarrow av_2 = 0$
$\underline{a \neq 0}$: $v_2 = 0 \Rightarrow$ z.B. $v = [1, 0], g = 1$ nicht halbeinfach
$\underline{a = 0}$: $v \in \mathbb{K}^2$ bel., $g = 2$ halbeinfach

$(A \cdot I)^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \Rightarrow \ker(A \cdot I)^2 = \mathbb{K}^2$

Satz

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. Es ex. eine Basis von $\mathbb{C}^n$ aus EV von A
2. Alle EQ von A sind halbeinfach.
3. Es ex. ein $C \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{C})$ mit $detC \neq 0$ mit $CAC^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_m \end{bmatrix}}_{n}$

Folgerungen

1. Wenn A n verscheidene EW besitzt dann ex. eine Basis von EV von A
2. Wenn $A = A^*$, dann ex. eine Basis von EV von A in $\mathbb{C}^n$ Wenn A ferner reell isr (d.h. $A = A^\top$), dann ex. eine Basis von EV von A in $\mathbb{R}^n$.
3. Eine reele Matrix $A \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{R})$ besitzt eine Basis von EV in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn alle EW halbeinfach und reell sind.

Satz

Sei $K = R, \lambda_1, \cdots, \lambda_{m_0} \notin R$
$\lambda_{m_0+j} = \overline{\lambda_j}$ für $j = 1, \cdots, m_0$
$\lambda_j \in R$ für $j = 2m_0 + 1, \cdots, m$
$\underline{m_0 = 3} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = \overline{\lambda_1}, \lambda_5 = \overline{\lambda_2}, \lambda_6 = \overline{\lambda_3}$
$\lambda_7, \lambda_8 \cdots \in \mathbb{R}$
Dann gilt: Alle EW von A sind halbeinfach genau dann,

wenn ein $C \in \mathbb{M}(n \times n; R)$ ex. mit $detC \neq 0$ und

$$CAC^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \Re\lambda_1 & -\Im\lambda_1 \\ \Im\lambda_1 & \Re\lambda_1 \end{matrix} & & & & \\ & \begin{matrix} \Re\lambda_1 & -\Im\lambda_1 \\ \Im\lambda_1 & \Re\lambda_1 \end{matrix} & & 0 & \\ & & \begin{matrix} \Re\lambda_1 & -\Im\lambda_1 \\ \Im\lambda_1 & \Re\lambda_1 \end{matrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Satz: Jordan'sche Normalform

$C_r^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$ Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ex. ein $C \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{C})$ mit $detC \neq 0$ mit

$$CAC^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_1\}e_{11} & & & 0 \\ & J_2\}e_{12} & & \\ & & J_3\}e_{13} & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & \end{bmatrix}}_{n} \quad J_1 = \left.\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}\right\} e_{11} \text{ Jordan-Block}$$