Egenwerte und Eigenvektoren

Die Aufgabe:
geg: $A \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$
ges: $\lambda \in K, v \in K^n$ mit $v \neq 0$ und $Av = \lambda v(1)$
heißt Eigenwertaufgabe, λ heißt Eigenwert von A, v heißt Eigenvektor zu λ. Die Menge aller EW von A heißt Spektrum von a (spec A)
Vorsicht: (1) ist ein System von n nichtkin. Gleichungen bzgl. der $n+1$ Unbekannten "$\lambda, v_1, \cdots, v_n$

Anwendung in der Numerik

Sei $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in specA$
$v_1, \cdots, v_n$ entsp. EV, lin. unabh. (Basis von EV von A in $\mathbb{K}^n$)
$A \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{K}) \Leftrightarrow F \in L(K^n; K^n) : F(v) := Av$
$F(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j) e_i$
A ist die Matrix-Darstellung von F bzgl. der Standard-Basis
Sei $C \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$ Matrix des Basis-Wechels von $e_1, \cdots, e_n$ zu $v_1, \cdots, v_n$ Sei $v_j = v_{j1} e_1 + \cdots + v_{jn} e_n$, dann $C \begin{bmatrix} v_{j1} \\ \cdots \\ v_{jn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$, also $Cv_j = e_j$
Matrix-Darstellung von F in $v_1, \cdots, v_n = CAC^{-1}$
$CA \underbrace{C^{-1} e_j}_{v_j} = C \underbrace{Av_j}_{\lambda_j v_j} = \lambda_j \underbrace{Cv_j}_{e_j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ \lambda_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow CAC^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ Diagonalmatrix.

Antwort des Algebraikers

Äquivalenzrelation in $\mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) : A\tilde{B} :\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$ mit $B = CAC^{-1}$
Kann man die Äquivalentklassen "klassifizieren"?

Antwort des Physikers

Spektrum eines "oszillierenden" Prozesses
$K = \mathbb{C}, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in spanA$
$v_1, \cdots, v_n$ entspr. EV, lin. unabh.

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j}_{x(t) \text{ Prozess}} = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} \underbrace{\lambda_j v_j}_{Av_j} = A \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t)}$$

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{c_j}_{\text{Intensität}} e^{\overbrace{Re\lambda_j t}^{\text{Abklingrate}}} (\cos \underbrace{Im\lambda_j t}_{\text{Frequenz}} + i \sin Im\lambda_j t)$$

Satz und Definition

charakt. Polynom und algebr, Vielfächheit lin EW

1. Das Polynom n-ter Ordnung $P(\lambda) := det(A \cdot \lambda I)$ heißt Polynom von A, und es gilt $specA = \{\lambda \in K : P(\lambda) = 0\}$.
2. Sei $specA = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}, \lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$.
   Dann gilt $P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{a_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda_m - \lambda)^{a_m}$ mit $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_1 + \cdots a_m = n$. Die Zahlen a_j heißen algebr. Vfheiten von λ_j.

Bemerkungen

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: möglicherweise $specA = \emptyset$
2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $specA \neq \emptyset$, besteht aus höchstens n verw. Zahlen
3. $A \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{C})$: üblicherweise werden EW und EV von reelen Matrizen im komplexen gesucht (Spezialfall)

Beispiel

$n = 2 : A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right], det(A - \lambda I) = det \left[\begin{smallmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{smallmatrix}\right] = \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc$
$a, b, c, d \in \mathbb{R} : \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{(\frac{a+d}{2})^2 - ad + bc}$
$= \frac{1}{2}(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc})$

$$\begin{cases} (a-d)^2 + 4bc > 0 \Rightarrow & \text{zwei reele EW, Vfheiten=1} \\ (a-d)^2 + 4bc = 0 \Rightarrow & \text{ein reeler EW, Vfheiten=2} \\ (a-d)^2 + 4bc < 0 \Rightarrow & \text{zwei komple. EW (konj. kompl. Paar), Vfheiten=1} \end{cases}$$

$A = A^\top$, d.h. $b = c \Rightarrow$ alle EW sind reel.

<u>Satz und Definition</u> adjungierte (komplex konjungierte, transponierte) Matrix

Sei $A = \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{C})$. Dann heißt die Matrix $A^* = \overline{(A^\top)} = \left[\begin{smallmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{smallmatrix}\right]$ adj. (oder kompl. konj. transp.) Matrx zu A, und es gilt $\langle An, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle$ für alle $n, v \in \mathbb{C}^n$
Insbesondere: $A^* := A^\top$, wenn $A \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{R})$.

Satz

Sei $Av = \lambda v, Aw = \mu w, v \neq 0, w \neq 0, \lambda \neq \mu$, dann gilt.

1. v und w sind lin. unabh.
2. $A = A^* \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

Satz

Wenn $A = A^*$ n verschiedene EW besitzt, dann ex. in $\mathbb{C}^n$ eine Orthogonalbasis von EV von A
und A nimmt "in dieser Basis Diagonalgestalt (mit dem EW in der Diagonale) an.