[Wiederholung. siehe 10.06.2003]

Standard-Orientierung in $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ induziert durch die Standard-Basis

Definition

$u, v \in \mathbb{R}^3 : u \times v \in \mathbb{R}^3$:

1. $u \times v = 0$, wenn u,v lin. abh.
2. $||u \times v|| := ||u||||v|| \sin\alpha, \cos\alpha := \frac{\langle u,v\rangle}{||u||||v||}$
3. $\langle u, u \times v\rangle = \langle v, u \times v\rangle = 0$ $u, v, u \times v$ sind pos. orientiert.

Rechenregeln

1. $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow u \times v = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} := (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3$
   $u \times v = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$
2. $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)xv = \lambda_1 u_1 xv + \lambda_2 u_2 xv$
3. $u \times v = -v \times u$

8. Lineare Gleichungssysteme: Allg. Theoreme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_u + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

(1) $y = 0 \Rightarrow$ (1) heißt homogen
$y = 1 \Rightarrow$ (1) heißt inhomogen
$Ax = y, A \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

$m = n$ **Fredholmsche Alternative**

Entweder die hom. Gl. besitzt eine nichttriv. Lösung (d.h. det $A = 0$= oder die inhom.Gl. besitzt für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ genau eine Lsg. $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(m \times n), K) \Rightarrow A^{top} := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ & \vdots & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(n \times m), K)$

Rechenregeln

$\langle Ax, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle A^\top y, x\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, A^\perp y\rangle_{\mathbb{R}^n}$

Satz

notw. und hin. Krit. für die Lösbarkeit von (1)
Folgende Beg. sind äquivalent

1. (1) besitzt eine lsg.
2. $rang \underbrace{A}_{\text{Koeffmatrix}} = rang \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{bmatrix}}_{\text{erweiterte Koeffmatrix}}$
3. $y \in [kerA^\top]^\perp$, d.h $\langle y, z\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $A^\top z = 0$
4. $imA = [kerA^\top]^\perp$