

### Wiederholung Matrix-Transformation

$$V = \mathbb{R}^2 : b_1 = [1, 1], b_2 = [0, 2], b'_1 = [1, 0], b'_2 = [0, 1]$$

$$C \in \mathbb{M}(2 \times 2; \mathbb{R}) : b_j = \sum_{i=1}^2 c_{ij} b'_i$$

$$b_1 = 1[1, 0] + 1[0, 1] \quad b_2 = 0[1, 0] + 2[0, 1] \quad \Leftrightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

### Anwendung von Determinanten

#### Satz und Definition: Rang

Sei  $A \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{K})$ , dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1.  $m$  ist die max. Anzahl lin. unabh. Zeilen von  $A$
2.  $m$  ist die max. Anzahl lin. unabh. Spalten von  $A$
3. Es existiert eine  $n \times n$ -Untermatrix  $A_0$  in  $A$  mit  $\det A_0 \neq 0$ , und für alle  $(m+1) \times (m+1)$ -Untermatrixzen  $A_1$  von  $A$  gilt  $\det A_1 = 0$
4. Wenn  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , denn  $\dim \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} = m$ .

$m$  heißt Rang von  $A$  und man schreibt  $\text{rang} A := m$

#### Beispiel

Wie groß ist  $\dim \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$ ?

$$\text{rang} A = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \geq 2$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rang} A = 2$$

#### Beispiel

Wie viele Lösungen besitzt das homog. lin. Gleichungssystem  $Ax = 0$ , d.h. wie groß ist  $\dim \ker A$ ?

$x \in \mathbb{R}^n, A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  Antwort  $\dim \ker A = n - \dim \text{im} A = n - \text{rang} A$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

besitzt einen eindim. Lösungsraum.

### Volumen von Parallel-Epipeds

$P(v_1, \dots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$

Parallel-Epiped, das von  $v_1, \dots, v_k$  aufgespannt wird.

Volumen:  $k = 1 : \text{vol} P(v_1) := \|v_1\|$

$k - 1 \mapsto k : \text{vol} P(v_1, \dots, v_k) = |\langle u_k, v_k \rangle| \text{vol} P(v_1, \dots, v_{k-1})$

$\langle u_k, v_i \rangle = 0$  für  $j = 1, \dots, k - 1, \|u_k\| = 1$

**Satz**

$v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{vol}P(v_1, \dots, v_n) = |\det[v_1, \dots, v_n]|$

Vorsicht:  $\det[v_1, \dots, v_k]$  mit  $k \neq n$  hat keinen Sinn.

**Eine Formel für  $A^{-1}$**

Sei  $\det A \neq 0$ ,  $A \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$ , dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} & \dots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} & \dots & (-1)^{n+2} \det A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{1+n} \det A_{1n} & (-1)^{2+n} \det A_{2n} & \dots & \dots & \det A_{nn} \end{bmatrix}$$

Folgerung

$A^{-1}$  hängt stetig von A ab.

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 6 & 0 & -21 \\ 2 & 8 & -11 \end{bmatrix}$$

**Vektorprodukt und Orientierung**

Sei V ein VR über  $\mathbb{R}$ . Zwei Basen  $b_1, \dots, b_n$  und  $b'_1, \dots, b'_n$  heißen äquivalent, wenn die Matrix der Transformation von  $b_1, \dots, b_n$  zu  $b'_1, \dots, b'_n$  eine positive Determinante besitzt.

Äqrelation  $b_1 = b'_1, \dots, b_n = b'_n \Rightarrow C = I \Rightarrow \det C = 1 > 0$

$\det C^{-1} = \frac{1}{\det C} > 0$

$\det C' C = \det C' \det C > 0$

Zwei Äquivalenzklassen. Orientierung in V:  $\Leftrightarrow$  Wahl einer dieser Äqklassen