

## 6. Determinanten

Für quadratische Matrizen:

$$A \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) \mapsto \det A \in \mathbb{K}, A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$$

### 6.1 Methoden der (Definition und) Berechnung

#### 6.1.1 Leibnitz-Formel

$$\det A = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \operatorname{sgn}(j_1, \dots, j_n) a_{ij_1} a_{ij_2} \dots a_{ij_n}$$

$$\operatorname{sgn}(j_1, \dots, j_n) = \begin{cases} 1 & (j_1, \dots, j_n) \text{ ist eine gerade Permutation von } \{1, \dots, n\} \\ -1 & (j_1, \dots, j_n) \text{ ist eine ungerade Permutation von } \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Permutation von  $\{1, \dots, n\} :=$  Bild einer bijektiven Abb.  $\{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$ .  
gerade (ungerade) Permutation  $\Leftrightarrow$  Anzahl der Index-Paare  $(i, k) \in \{1, \dots, n\}^2$   
mit  $i < k$  und  $j_i > j_k$  gerade (ungerade).

#### Beispiel

$$n = 2 \left. \begin{array}{l} \operatorname{span}(1,1) = \operatorname{span}(2,2) = 0 \\ \operatorname{span}(1,2) = 1 \\ \operatorname{span}(2,1) = -1 \end{array} \right\} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(1,2) a_{11} a_{22} + \operatorname{span}(2,1) a_{12} a_{21} =$$

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$n = 3 \left. \begin{array}{l} \operatorname{sgn}(1,2,3) = 1 = \operatorname{sgn}(3,1,2) = \operatorname{sgn}(2,3,1) \\ \operatorname{sgn}(2,1,3) = -1 = \operatorname{sgn}(3,2,1) = \operatorname{sgn}(1,3,2) \end{array} \right\}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} -$$

$$a_{11} a_{23} a_{32}$$

#### 6.1.2 Entwicklung nach Zeilen oder Spalten

$$\det A = \underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}_{j \in \{1, \dots, n\} \text{ beliebig}} = \underbrace{\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}_{i \text{ beliebig}}$$

$$A_{ij} := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{31} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{3n} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{23} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

#### 6.1.3 Berechnung nach Blöcken

$$\det \begin{bmatrix} \underbrace{B}_m & C \\ D & \underbrace{E}_{n-m} \end{bmatrix}$$

$B \in \mathbb{M}(m \times m), E \in \mathbb{M}((n-m) \times (n-m))$

$$C \in \mathbb{M}(m \times (n - m)), D \in \mathbb{M}((n - m) \times m)$$

$$1 \leq m \leq n - 1$$

Wenn  $\det B \neq 0$ , dann  $\det A = \det B \cdot \det(E - DB^{-1}C)$

insbesondere  $c = 0$  oder  $D = 0$ , denn  $\det A = \det B \cdot \det E$

insbesondere Dreiecksmatrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

## 6.2 Rechenregeln

1.  $\det A = \det A^{\perp}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ transponierte Matrix}$$

2.  $\det[a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \lambda a_j + \mu b_j, a_{j+1}, \dots, a_n] = \lambda \det[a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n] + \mu \det[a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n]$

$a_j \in \mathbb{K}^n \mapsto \det[a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n] \in \mathbb{K}$  ist linear (für jedes  $j$ )

$A \in \mathbb{M}(n \times n) \mapsto \det A$  ist nicht linear,

$\det(A + B) \neq \det A + \det B$  (im allgem.)

3.  $\det[a_1, \dots, a_j, \dots, a_k, \dots, a_n] = -\det[a_1, \dots, a_k, \dots, a_j, \dots, a_n]$

insbesondere:

$$a_j = a_k \Rightarrow \det[a_1, \dots, a_n] = 0$$

$$\det[a_1 + \lambda a_2, a_2, \dots, a_n] = \det[a_1, a_2, \dots, a_n] + \lambda \underbrace{\det[a_2, a_2, \dots, a_n]}_{=0}$$

Wenn zwei Zeilen oder Spalten linear abh. sind, so gilt:  $\det A = 0$

4. Satz

$\det A = 0 \Leftrightarrow$  die Zeilen sind linear abh.

$\Leftrightarrow$  die Spalten sind linear abh.

$\Leftrightarrow A^{-1}$  existiert nicht

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$  die Zeilen sind linear unabh.

$\Leftrightarrow$  die Spalten sind linear unabh.

$\Leftrightarrow A^{-1}$  existiert

5.  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

insbesondere  $\det(AA^{-1}) = \det I = 1 = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$