Matrix eines Basis-Wechsels

V, Basen in V: $b_1, \cdots, b_n; b_1', \cdots, b_n'$
$C \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{K})$: Wozu ist C nützlich? Wenn $v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n = v_1' b_1' + \cdots + v_n' b_n'$, dann $\begin{bmatrix} v_1' \\ \cdots \\ v_n' \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$
Wie berechnet man C? $b_j = c_{1j} b_1' \cdots + c_{nj} b_n'$ $(j = 1, \cdots, n)$, dh die Koordinaten des j-ten alten Basis-Vekors bzlg der neuen Basis bilden die j-te Spalte von C.

Beispiel

$V = \mathbb{R}_2[x], n = 3$
alte Basis: $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2$
neue Basis: $1, x, x^2$
$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2$
$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = 4 \cdot 1 + 4 \cdot x + 1 \cdot x^2$
$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = 9 \cdot 1 + 6 \cdot x + 1 \cdot x^2$
$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Matrix-Darstellung einer lin. Abb. bzgl gegebender Basen

$V, W, F \in \mathcal{L}(V, W)$
$a_1, \cdots, a_n$ Basis in V
$b_1, \cdots, b_m$ Basis in W
$A_F = \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$: Wozu ist A_F nützlich? Wenn $F(v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n) = w_1 b_1 + \cdots + w_m b_m$, dann $\begin{bmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} = A_F \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$
wie berechnet man A_F? $F(aj) = a_{ij} b_1 + \cdots + a_{mj} b_m$ $(j = 1, \cdots, n)$, dh die Koordiaten des Bildes des j-ten Basis-Vektors in V bilden die j-te Spalte von A_F.

Beispiel

$V = W = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n, u \neq$ fixiert. $u = u_1 e_1 + \cdots + e : ne_n$, $u_j = \langle n, e_j \rangle$
$F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$: Orthogonalprojektor auf span$\{u\}$. $a_1 = b_1 = e_1, \cdots, a_n = b_n = e_n$ Standard-Basis.
$F(e_j) = \langle F(e_j), e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle F(e_j), e_n \rangle e_n$. $F(v) = \left\langle v, \frac{u}{||u||^2} \right\rangle \frac{u}{||u||^2}$
$= \left\langle u_j \frac{u}{||u||^2}, e_1 \right\rangle e_1 + \cdots + \left\langle u_j \frac{u}{||u||^2}, e_n \right\rangle e_n$
$= \frac{u_j}{||u||^2} \langle u, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \frac{u_j}{||u||^2} \langle u, e_n \rangle e_n$
$= \frac{u_j}{||u||^2} u_1 e_1 + \cdots + \frac{u_j}{||u||^2} u_n e_n$

$$A_F = \begin{bmatrix} \frac{u_1 u_1}{||u||^2} & \frac{u_1 u_2}{||u||^2} & \cdots & \frac{u_1 u_n}{||u||^2} \\ \frac{u_1 u_2}{||u||^2} & \frac{u_2 u_2}{||u||^2} & \cdots & \frac{u_2 u_n}{||u||^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1 u_n}{||u||^2} & \frac{u_2 u_n}{||u||^2} & \cdots & \frac{u_n u_n}{||u||^2} \end{bmatrix} A_{F \circ F} = A_F = A_F A_F$$

neue Basis in $\mathbb{R}^n$, so dass A_F' „sparsam besetzt“ ist:
$a_1' = \frac{u}{||u||}$
$a_2', \cdots, a_n'$ Orthogonalbasis in $[span\{u\}]^\perp$

$$\left.\begin{array}{c} F(a'_1)=a'_1 \\ F(a'_2)=0 \\ F(a'_3)=0 \\ \cdots \\ F(a'_n)=0 \end{array}\right\} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A'_F A'_F = A'_F$

Satz über die Transformation von Matrix-Darstellug lin. Abb. unter Basis-Wechsel

Seien V,W VR über $\mathbb{K}$,
$a_1, \cdots, a_n$ und $a'_1, \cdots, a'_n$ Basen in V
$b_1, \cdots, b_n$ und $b'_1, \cdots, b'_n$ Basen in W
$C \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$ die Matrix des Basis-Wechsels von $a_1, \cdots, a_n$ zu $a'_1, \cdots, a'_n$
$D \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{K})$ die Matrix des Basis-Wechsels von $b_1, \cdots, b_m$ zu $b'_1, \cdots, b'_m$
$A_F, A'_F \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$ die Matrix-Darstellung von F bzgl dem alten (bzw neuen) Basis-Paar.
Dann gilt: $A'_F = DA_FC^{-1}$