

## 5.2 Die inverse Matrix

### Satz und Definition

Sei  $A \in M(n \times n, K)$ , dann sind folgende Bedingungen äquivalent

- (i)  $\exists B \in M(n \times n, K)$  mit  $BA = I_n$
- (ii)  $\exists C \in M(n \times n, K)$  mit  $AC = I_n$
- (iii) Die lineare Abbildung  $v \in K^n \mapsto Av \in K^n$  ist bijektiv

A ist die Matrix-Darst. dieser Abb. bzgl. der Standard-Basis

Wenn (i)-(iii) gilt, dann ist  $B = C$ , und diese Matrix heißt inverse Matrix zu A und wird mit  $A^{-1}$  bezeichnet. Die Abb.  $v \in K^n \mapsto A^{-1}v \in K^n$  ist die inverse Abbildung zu  $v \in K^n \mapsto Av \in K^n$ .

### Gauß-Algorithmus zur Berechnung von $A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dann gilt  $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$

### Folgerung

$$(A_F)^{-1} = A_{F^{-1}}, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

## 5.3 Basiswechsel-Matrizen

V Vektorraum,  $b_1, \dots, b_n$  Basis.

$$\Phi_b V \mapsto K^n : \Phi_b(v_1 b_1 + \dots + v_n b_n) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\Phi'_b V \mapsto K^n$$

### Satz und Definition

Seien  $b_1, \dots, b_n$  (1) Basis in V "alte Basis"

Seien  $b'_1, \dots, b'_n$  (2) Basis in V "neue Basis"

Dann ist die Bed.  $b_j = c_{1j}b'_1 + \dots + c_{nj}b'_n$  für alle  $j = 1, \dots, n$  (3) äquivalent

$$\text{zu: } \sum_{j=1}^n v_j b_j = \sum_{j=1}^n v'_j b'_j \text{ gdw. } v'_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j \text{ (d.h. } \begin{bmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{) (4)}$$

Die Matrix  $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$  heißt Matrix des Basis-Wechsels von (1) zu (2), und es gilt:

- (i)  $C^{-1}$  ist die Matrix des Basis-Wechsels von (2) zu (1)
- (ii) Sei  $b''_1, \dots, b''_n$  (5) Basis in V und  $C'$  die Matrix des Basis-Wechsels von (2) zu (5). Dann ist  $C'C$  die Matrix des Basis-Wechsels von (1) zu (5).