

Einheitsmatrix

$$I = E \in M(n \times n; K); I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$Au = v : v_i = \sum_j a_{ij} u_j$$

Spannungstensor:

$$S \in M(3 \times 3; R)$$

S_n ist die Kraft pro Fläche (Druck), mit der der "untere" Körper auf den oberen

wirkt (local in x) $\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix}$

s_{11} ist die Komponenten der Kraft pro Fläche, mit der der eine "Körper" auf den anderen wirkt (Druck).

s_{12} ist die e_2 -Komponente ... (Scherkraft).

5.1 Matrix - Darstellungen linearer Abbildungen

Satz und Definition

Seien V und W Vektorräume über K . Seien a_1, \dots, a_n Basis in V , b_1, \dots, b_m Basis in W . Dann gilt:

1. $\forall F \in \mathcal{L}(V, W) \exists! A \in M(m \times n; K) : F(v_1 a_1 + \dots + v_n a_n) = w_1 b_1 + \dots + w_m b_m$ genau dann, wenn $A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$
2. $\forall A \in M(m \times n; K) \exists F \in \mathcal{L}(V; W)$ mit (1)
3. Die Abb $A \in M(m \times n; K) \mapsto F =: F_A \in \mathcal{L}(V; W)$ ist linear.
4. $F_{AB} = F_a \circ F_B$

A heißt Matrix-Darstellung von F bzgl. a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_m . F heißt durch A und a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_m induzierte Abbildung.

Bemerkung zur Berechnung von A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{=e_j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

$$F(a_j) = F(0a_1 + \dots + 0a_{j-1} + 1a_j + 0a_{j+1} + \dots + 0a_n) = a_{1j}b_1 + \dots + a_{mj}b_m$$

Bsp: Drehungen

$V = W = \mathbb{R}^2$, Standard-Basis, $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ Drehung um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn.

$$A \in M(2 \times 2; R) : A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$F(e_1) = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2 \Rightarrow a_{11} = \cos \varphi, a_{21} = \sin \varphi$$

$$F(e_2) = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2 \Rightarrow a_{12} = -\sin \varphi, a_{22} = \cos \varphi$$

$$F = F_\psi \circ F_\varphi = F_{\psi+\varphi}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{bmatrix}$$

Bsp: Spiegelungen

$V = W = \mathbb{R}^2$, Standard-Basis F =SPiegelung an der Abszissenachse

$$F(e_1) = e_1 = 1e_1 + 0e_2$$

$$F(e_2) = -e_2 = 0e_1 - 1e_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F \circ F = I : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel

$V = W = \mathbb{R}_3[x]$, VR der reellen Polynome vom Grad ≤ 3

Basis: $1, x, x^2, x^3$

$$F = \frac{d}{dx}: \text{d.h. } F(P) = P'$$

$$F(1) = 0$$

$$F(x) = 1$$

$$F(x^2) = 2x$$

$$F(x^3) = 3x^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F \circ F \circ F \circ F = \frac{d^4}{dx^4} 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x], \mathbb{R}_3[x])$$