$F : V \to W : F(\lambda u - \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v) \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \; \forall u, v \in V$
lin. Abb. von V nach W: Homomorphismus von V nach W :$\mathcal{L}(V, W) = Hom(V, W)$
lin. Abb. von V nach V: Endomorphismus von V nach W :$\mathcal{L}(V, V) = Hom(V)$
bijektive lin. Abb. von V nach W: Isomorphismus von V nach W

Satz und Definition: Projektoren

1. Sei $V = U_1 \oplus U_2$ (d.h. $V = U_1 + U_2, U_1 \cap U_2 = \{0\}$), d.h. $\forall v \in V \; \exists! u_1 \in U_1 \; \exists! u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$. Dann heißt die Abb. $v \in V \to P(v) := u_1 \in U - 1$ Projektor/Projektion von V auf U_1 entlang U_2 und es gilt:
   $P \imath n \mathcal{L}(V, V), kerP = U_2, imP = U_1, P \circ P = P$ und $P(u_2) = 0 \; \forall u_2 \in U_2, P(u_1) = u_1 \; \forall u_1 \in U_1$.

2. Sei $P \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $P \circ P = P$. Dann gilt $V = imP \oplus kerP$, und P ist die Projektion von V auf imP entlang $kerP$.

5. Matrizen

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n} = [a_{jk}] = A \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$

Addition

$[a_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n} + [b_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n} = [a_{jk} + b_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n}$

Multiplikation mit Skalaren

$\lambda [a_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n} := [\lambda a_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n}$
$\mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$

Nullelement:

$[a_{jk} = 0$ mit $a_{jk} = 0 \; \forall j = 1, \cdots, m \; \forall k = 1, \cdots, n$

inverses Element (bzgl. der Addidion!):

$-[a_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n} = [-a_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n}$

Multiplikation von Matrizen

$\underbrace{[a_{ij}]_{i=1}^{l} {}_{j=1}^{m}}_{\in M(l \times m; \mathbb{K})} \cdot \underbrace{[b_{jk}]_{j=1}^{m} {}_{k=1}^{n}}_{\in M(m \times n; \mathbb{K})} = \underbrace{[c_{ik}]_{i=1}^{l} {}_{k=1}^{n}}_{\in M(l \times n; \mathbb{K})}$

$\boxed{c_{ik} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \text{ für } i = 1, \cdots, l; k = 1, \cdots, n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ik} & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk}}$$

Beispiel

$l = m = n = 2$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot0 \\ 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot1 \\ 0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Spezialfälle

$n = 1$: Matrix: Spaltenvektor: $\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix}}_{\in M(l\times m;\mathbb{K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\in\mathbb{K}^m} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}b_1+\cdots+a_{1m}b_m \\ \vdots \\ a_{l1}b_1+\cdots+a_{lm}b_m \end{bmatrix}}_{\in\mathbb{K}^l}$

$l = n = 1$: Zeilenvektor $\cdot$ Spaltenvektor=Zahl

$[a_1, \cdots, a_m] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_mb_m$

$l = m = n = 1$: $[a] \cdot [b] = [ab]$

$l = m = n$: quadratische Matrix $\cdot$ quadratische Matrix=quadratische Matrix.

Multiplikation in $M(n \times n; \mathbb{K})$

Rechenregeln

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(AB)C = A(BC) = ABC$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda AB$
- $0A = A0 = 0$