4. Lineare Abbildungen

V,W Vektorrume über einen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (gleiches $\mathbb{K}$!)

Definition

$F{\cdot}V \to W$ heißtt linear, wenn gilt: $\boxed{F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V}$
$\mathcal{L}(V, W)$:=Menge der lin. Abb. von V auf W.

Beispiele

1. identische Abb. $I : V \to V : I(v) = v\ \forall v \in V$
   $I(\lambda u + \mu v) = \lambda u + \mu v = \lambda I(u) + \mu I(v)$
2. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist linear genau dann, wenn:
   $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : F(x) = ax\ F(x) = F(x \cdot 1) = x\underbrace{F(1)}_{a}$
3. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist linear genau dann, wenn
   $\exists a \in \mathbb{C}\ \forall z \in \mathbb{C} : F(z) = az$,Graph$(F) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$
   $a = r^{i\varphi}$
   $F(z) = r^{i\varphi}z$
   F ist die Superposition von einer <u>Drehung</u> und einer <u>Streckung</u>
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist linear genau dann, wenn:
   $\exists v_0 \in \mathbb{R}^n\ \forall v \in \mathbb{R}^n : F(v) = \langle v, v_o \rangle$.
   $F(x) = F\big((v_1, \cdots, v_n)\big) = F(v_1e_1 + \cdots + v_ne_n) = v_1F(e_1) + \cdots + v_nF(e_n) = \langle (v_1, \cdots v_n), \underbrace{(F(e_1), \cdots, F(e_n))}_{v_0} \rangle$.
5. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist linear genau dann, wenn:
   $\exists v_0 \in \mathbb{R}^n\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : F(\lambda) = \lambda v_0$
   $F(\lambda) = F(\lambda \cdot 1) = \lambda\underbrace{F(1)}_{v_0}$
6. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist linear genau dann, wenn: $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
F((x,y)) &= \underbrace{(ax+by, cx+dy)}_{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]} \\
F((x,y)) &= F(xe_1 + ye_2) \\
&= \underbrace{xF(e_1)}_{(a,c)} + \underbrace{y(F(e_2)}_{(c,d)} \\
&= x(a,c) + y(b,d) = (ax+by, cx+dy)
\end{aligned}
$$

<u>z.B.</u> $a = -1, d = 1, b = c = 0$

$$F((x,y)) = (-x, y)$$

Spiegelungen sind lineare Abb. von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (als VR über $\mathbb{R}$!), sind aber nicht lin. Abb. von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.
VR über $\mathbb{R} : F(\lambda(x,y)) = \lambda F((x,y)) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
VR über $\mathbb{C} : F(\lambda z) = \lambda F(z) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

7. $v = W = \mathbb{R}[x]; F(P) := P'$ ist linear: $\lambda P + \mu Q)' = \lambda P + \mu Q$

8. $V = W = \mathbb{R}[x]; F(P) := \int\limits_0^x P(y)dy$ ist linear. $\int\limits_0^x (\lambda P(y) + \mu Q(y))dy = \lambda \int\limits_0^x P(y)dy + \mu \int\limits_0^x Q(y)dy.$

Eigenschaften

1. $F \in (U,V), g \in \mathcal{L}(V,W) \Rightarrow GF \in \mathcal{L}(U,W)$
   $(G+F)(\lambda a+\mu v) = G(F(\lambda u+\mu v)) = G(\lambda F(u)+\mu F(v)) = \lambda \underbrace{G(F(u))}_{(G\cdot F(u)} + \mu \underbrace{G(F(v))}_{(G\cdot F)(v)}$

2. $F \in \mathcal{L}(V,W)$ bijektiv $\Rightarrow F^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$
   $\lambda F^{-1}(u) + \mu F^{-1}(v) = w$
   $\Rightarrow F(w) = F(\lambda F^{-1}(u) + \mu F^{-1}(v))$
   $= \lambda \underbrace{F(F^{-1}(u))}_{u} + \mu \underbrace{F(F^{-1}(v))}_{v} = \lambda u + \mu v$
   $F(\lambda F^{-1}(u) + \mu F^{-1}(v)) = \lambda u + \mu v \Rightarrow \lambda F^{-1}(u) + \mu F^{-1}(v) = F^{1}(\lambda u + \mu v)$

3. $\mathcal{L}(V,W)$ ist VR ber K mit:
   $(F+G)(v) := F(v) + G(v) \quad (\lambda F)(v) := \lambda F(v)$
   Nullelement: $F(v) = 0 \ \forall v \in V$ inverses Element: $(-F)(v) = -F(v) \ \forall v \in V$

4. $F \in \mathcal{L}(V,W)$:
   <u>Kern:</u> $kerF := \{v \in V : F(v) = 0\}$ Unterraum in V: $u, v \in kerF \Rightarrow F(u) = F(v) = 0 \Rightarrow F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v) = 0$
   <u>Bild:</u> $imF := \{F(x) \in W : v \in V\}$ Unterraum von W: $w_1, w_2 \in IimF \Rightarrow w_1 = F(v_1), w_2 = F(v_2) \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v:2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$
   f ist surrjektiv gdw. $imF = W$
   f ist injektiv gdw. $kerF = \{0\}$
   $F(u) = F(v) \Leftrightarrow F(u - v) = 0 \Leftrightarrow u - v \in kerF$

<u>**Satz: Dimensionsformel für lin. Abb**</u>

Sei $F \in \mathcal{L}(V,W), dimV < \infty$, dann gilt dim im $F < \infty$
und $\boxed{\text{dim ker F + dim im F= dim V}}$

<u>**Folgerungen**</u>

1. Wenn ein bijektives $F \in \mathcal{L}(V,W)$, dann dim V=dim W:
   F ist injektiv $\Rightarrow dimkerF = 0$
   F ist surjektiv $\Rightarrow dimimF = dimW \ dimV = 0 + dimW$
   <u>aber:</u> Es ex. <u>nichtlin.</u> Abb $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

2. <u>Fredholm'sche Alternative:</u> $F \in \mathcal{L}(V,W)$ ist injektiv $\Leftrightarrow dimker F = 0 \Leftrightarrow im F = V \Leftrightarrow$ F ist surjektiv
   Entweder die "homogene" lin. Gleichung $F(v) = 0$ besitzt eine "nichttriviale" Lsg oder die "inhomog." lin Gleichung $F(v) = W$. besitzt für jedes $w \in V$ eine Lsg $v \in V$