Wiederholung

$(u,v) \in V \times V \to \langle u,v \rangle \in \mathbb{K}$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Euklidischer VR
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Hermite'scher VR

Satz und Definition

Sei V ein VR mit SP, U ein Unterraum von V.
$e_1, \cdots, e_n$ ONB in U.
$v \in V$
Dann heißt $v_0 := \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$ orthogonale Projektion von v auf U, $v - v_0$ heißt senkrechtes Lot von v auf M, es gilt $\langle v - v_0, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$ und $||v - v_0|| \langle ||v - u||$ für alle $u \in U$ mit $u \neq v_0$.

Abstand eines Punktes $v \in V$ von einem affinen UR $A = w + U = \{w + u : u \in U\}$, U UR von V

$$\begin{aligned} &\text{Abstand von } v \text{ zu } A && (1)\\ &= \min\{||v - a|| : a \in A\} && (2)\\ &= \min\{v - (w+u)|| : u \in U\} && (3)\\ &= \min\{||(v-w) - u|| : u \in U\} && (4)\\ &= \text{Abstand von v-w zu U} && (5) \end{aligned}$$

Satz und Definition: Orthogonales Komplement und Orthoprojektor

Sei V VR mit SP, U Unterraum von V.
Dann ist $U^{\perp} := \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \forall u \in U\}$ ein Ur von V und $U^{\perp}$ heißt orthogonales Komplement von U in V.
Es gilt $V = U \oplus U^{\perp}$, d.h. $V = U + U^{\perp}$ und $U \cap U^{\perp} = \{0\}$,
d.h. $\forall v \in V \exists' U \in U \exists u^{\perp} \in U^{\perp} : v = u + u^{\perp}$
Die Abbildung: $v \in V \to u \in U$ heist orthogonale Projektion von v auf U.
Bezeichnungsweise: $u = Pv$

Beispiel

$V = \mathbb{R}^3, U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0\} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 > 0$
$U^{\perp} = \text{span}\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}$
ONB in U^t : $\frac{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}$

$$||v - Pv|| : \quad \underbrace{\left| \left\langle (u_1, u_2, u_3), \frac{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \right\rangle \right|}_{= \left| \frac{(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3)}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} \right| = \text{Abstand von v nach U}} \cdot \underbrace{\left|\left| \frac{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \right|\right|}_{=1}$$

Beispiel

$V = \mathbb{R}, U = \text{span}\{u_0\}, u_0 \neq 0$
ONB in U: $\frac{u_0}{||u_0||}$
$Pv = \left\langle v, \frac{u_0}{||u_o||} \right\rangle \frac{u_1}{||u_0||}$
$\left|\left|v - Pv\right|\right| = \left|\left|v - \left\langle v, \frac{u_0}{||u_o||} \right\rangle \frac{u_0}{||u_0||}\right|\right| = \sqrt{\left\langle v - \left\langle v, \frac{u_0}{||u_o||} \right\rangle \frac{u_0}{||u_0||}, v - \left\langle v, \frac{u_0}{||u_o||} \right\rangle \frac{u_0}{||u_0||} \right\rangle} =$
$\sqrt{||v||^2 - \left\langle v, \frac{u_0}{||u_o||}^2 \right\rangle} = \sqrt{||v||^2 - \frac{\langle v, u_0\rangle^2}{||u_o||^2}}$

Satz:

Hilbert-Schmidt-Orthonormierungsverfahren.
Sei $b_1, \cdots, b_n$ Basis in V. Dann existiert eine ONB $e_1, \cdots, e_n$ in V mit: span $\{b_1, \cdots, b_n\} = \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\} \forall j = 1, \cdots, w$

Beweis:

$e_1 := \pm \frac{b_1}{||b_1||}$
$e_2 := \lambda_1 e_1 + \lambda_2 b_2 :$
$\langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 b_2, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 b_2 \rangle = 1$
$= \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \langle e_1, b_2 \rangle + \lambda_2^2 ||b_2||$

$\langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 b_2, e_1 \rangle = 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \langle b_2, e_1 \rangle$
$\Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \langle b_2, e_1 \rangle$
$\Rightarrow 1 = \lambda_2^2 \left[\langle b_2, e_1 \rangle^2 + ||b_2||^2 - 2\langle e_1, b_2 \rangle^2 \right]$

Beispiel

$\lambda_2^2 = \frac{1}{||b_2||^2 - \langle e_1, b_2 \rangle^1}$
$e_2 = \pm \frac{b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1}{||b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1||}$
$\lambda_2 = \pm \frac{1}{||b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1||}, \lambda_1 = \mp \frac{\langle b_2, e_1 \rangle}{||b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1||}$
$e_{j+1} = \pm \frac{b_{j+1} - \sum\limits_{k=1}^{j} \langle b_{j+1}, e_k \rangle e_k}{||b_{j+1} - \sum\limits_{k=1}^{j} \langle b_{j+1}, e_k \rangle e_k||}, \langle e_{j+1}, e_l \rangle = \left\langle \pm \frac{b_{j+1} - \sum\limits_{k=1}^{j} \langle b_{j+1}, e_k \rangle e_k}{||b_{j+1} - \sum\limits_{k=1}^{j} \langle b_{j+1}, e_k \rangle e_k||} e_l \right\rangle$
$(l = 1, \cdots, j)$

$$= \frac{\pm 1}{||\cdots||} \left[\langle b_{j+1}, e_l \rangle - \underbrace{\sum_{k=1}^{j} \langle b_{j+1}, e_k \rangle \langle e_k, e_l \rangle}_{\langle b_{j+1}, e_l \rangle} \right] = 0$$