

### 3. Skalarprodukte und Orthogonalität

$V$  sei Vektorraum ueber  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ )

#### Definition

Eine Abbildung  $\langle u, v \rangle \in \mathbb{K}$  heißt Skalarprodukt (oder inneres Produkt) auf  $V$ , wenn für alle  $u, v, w \in V$  und für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gilt:

1.  $\langle u, u \rangle > 0$  falls  $u \neq 0$
2.  $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$
3.  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ )

Die Abbildung  $v \in V \rightarrow \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}$  heißt Norm auf  $V$  zu den SP  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
 $\|v\|$  heißt Länge des Vektors  $v$

$\|u - v\|$  heißt Abstand des Punktes  $u$  zum Punkt  $v$ .

Zwei Vektoren  $u, v \in V$  heißen orthogonal, wenn  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Wenn  $\varphi \in [0, \pi[$  mit  $\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$  gilt, so heißt  $\varphi$  Winkel zwischen  $u$  und  $v$ .

#### **Beispiel**

$$V = \mathbb{R}^n, \langle (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

$$\|(v_1, \dots, v_n)\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

#### **Rechenregeln**

- $\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$   
 $\mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$   
 $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$   
 $\langle \lambda v, u \rangle = \overline{\lambda} \langle v, u \rangle = \overline{\lambda} \overline{\langle u, v \rangle} = \overline{\overline{\lambda} \langle u, v \rangle}$
- $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\|$
- Dreiecksungleichung:  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$   
 $\sqrt{\int_0^1 [f(x) + g(x)]^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 g(x)^2 dx}$
- Satz von Pythagoras:  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$   
genau dann, wenn  $\text{Re} \langle u, v \rangle = 0$
- Parallelogramm-Identität:  $\|u + v\| + \|u - v\| = 2(\|u\| + \|v\|)$
- Cauchy-Schwarz-Ungelichung:  $|u_1 v_1 + \dots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} + \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

**Beispiel**

$$v = \mathbb{R}, \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = \frac{1}{a^2}u_1v_1 + \frac{1}{b^2}u_2v_2 \quad (a, b > 0)$$

$$1 = \|(u_1, u_2)\| = \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} \quad (\text{Ellipse})$$

**Beispiel**

$$V = C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \|f\| = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$$

**Analysis auf VR mit SP**

Eine Folge von Vektoren  $v_1, v_2, \dots \in V$  konvergiert gegen  $v \in V$ , wenn  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j - v\| = 0$ .

Eine Funktion  $f : V \rightarrow V$  heißt stetig in  $v_0 \in V$ , wenn für jede Folge  $v_1, v_2, \dots \in V$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j - v_0\| = 0$  gilt  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f(v_j) - f(v_0)\| = 0$

**Satz und Definition: Orthogonalbasen**

Sei  $\dim V = n$

$$e_1, \dots, e_n \in V \text{ mit } \langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{wenn } j \neq k \\ 1 & \text{wenn } j = k \end{cases}$$

Dann ist  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis in  $V$  (eine sogenannte ONB) und für jedes  $v \in V$  gilt:  $v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$ , d.h.  $(\langle v, e_1 \rangle, \dots, \langle v, e_n \rangle)$  ist das Tupel der Koordinaten von  $v$  bzgl.  $e_1, \dots, e_n$

**Beispiel**

$$V = \mathbb{R}^n, e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ist ONB.}$$

**Satz und Definition: Senkrechtes Lot und orthogon. Projektion**

Sei  $U$  Unterraum von  $V$ ,  $e_1, \dots, e_n$  ONB in  $U$ .

$v \in V$  Dann heißt  $u = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n \in U$  orthogonale Projektion von  $v$  auf  $U$ , und  $v - u$  heißt senkrechtes Lot von  $v$  auf  $U$ , und es gilt

$$\|v - u\| = \underbrace{\min\{\|v - w\| : w \in U\}}_{\text{Abstand von } v \text{ nach } U}.$$

Abstand von  $v$  nach  $U$ .