

Satz:

Wenn a_1, \dots, a_m und b_1, \dots, b_n Basen in V sind, dann gilt $m = n$.

Rechenregeln

1. $\dim \text{span}\{v_1, \dots, v_n\} \leq n$ $\dim \text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = n$ genau dann, wenn v_1, \dots, v_n linear unabhängig, d.h. genau dann wenn v_1, \dots, v_n Basis in $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.
2. Wenn U Unterraum von V ist so $\dim U \leq \dim V$.
3. Wenn $v_1, \dots, v_n \in V$ und $n > \dim V$, dann v_1, \dots, v_n linear anhängig.

Satz:

- (i) $\dim V \times W = \dim V + \dim W$
- (ii) $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.

komplexe Vektorräume (VR über \mathbb{C})

Menge V mit Abb. $(u, v) \in V^2 \rightarrow u + v \in V, (\lambda, u) \in \mathbb{C} \times V \rightarrow \lambda u \in V$ mit

Beispiel

$$\mathbb{C}^n = \{(v_1, \dots, v_n) : v_j \in \mathbb{C}\} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix}, \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix}$$

Reellifizierung

Sei V ein VR über \mathbb{C} , dann ist V mit demselben $+$ und der Einschränkung der Multiplikation auf $\mathbb{R} \times V$, d.h. mit $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \rightarrow \lambda v \in V$ wieder ein VR, aber nun über \mathbb{R} . Dieser VR wird nun Reellifizierung von V genannt und mit $V_{\mathbb{R}}$ bezeichnet. Eigenschaften

- (i) Sei $v \in V, v \neq 0$. Dann sind v und iv linear abh. in V , aber lin. unabh. in $V_{\mathbb{R}}$
- (ii) Sei b_1, \dots, b_n in V , dann ist $b_1, \dots, b_n, ib_1, \dots, ib_n$ Basis in $V_{\mathbb{R}}$, insbesondere $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$