

## 2.3 Lineare Abhängigkeit

### Definition:

- $v_1, \dots, v_n \in V$  heißen linear abhängig, wenn gilt:  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$  und  $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$  (1)
- $v_1, \dots, v_n \in V$  heißen linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig sind, d.h.  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  (1)

### Beispiel

$$V = \mathbb{R}^3$$

n=2  $v_1, v_2$  linear abhängig  $\Leftrightarrow$  einer der Vektoren ist skaliertes Vielfaches des anderen  $\Leftrightarrow v_1, v_2$  liegen auf einer Gerade durch Null.

n=3  $v_1, v_2, v_3$  linear abh.  $\Leftrightarrow$  liegen auf einer Ebene durch Null.

### Lemma

$v_1, \dots, v_n$  sind lin. abh  $\Leftrightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\} : v_j \in \text{span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, \dots, v_n\}$   
 $v_1, \dots, v_n$  sind lin. unabh  $\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : v_j \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, \dots, v_n\}$

### Beispiel

$$V = \mathbb{R}^m, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$$

$$v_1 = [v_{11} \dots v_{m1}], \dots, v_n = [v_{1n}, \dots, v_{mn}]$$

$$\underline{\text{Ansatz:}} [0, \dots, 0] = \lambda_1 [v_{11} \dots v_{m1}] + \dots + \lambda_n [v_{1n}, \dots, v_{mn}]$$

$$0 = \lambda_1 v_{11} + \dots + \lambda_n v_{1n}$$

$\vdots$   $\Leftrightarrow$  lin. Gleichungssystem für  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  m Gleichungen

$$0 = \lambda_m v_{m1} + \dots + \lambda_n v_{mn}$$

### Beispiel

$$V = \mathbb{F}(\mathbb{R}), f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$$

Ansatz:

$$0 = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$$

$$0 = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{n=3:} f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin x, f_3(x) = \cos x$$

$$\underline{\text{Frage:}} \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : \lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x = 0$$

$$x=0 : \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} : \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad x = \pi : \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \quad \} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Strategie zum Beweis der lin. Unabhängigkeit

Satz

1. Seien  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig, dann gilt:  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  sind linear unabhängig  $\Leftrightarrow v_{n+1} \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$
2. Seien  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig  $\Rightarrow v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  linear abhängig
3. Seien  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  linear unabh.  $\Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig
4. Seien  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  linear abh. dann gilt:  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig  $\Leftrightarrow v_{n+1} \in \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$

## 2.3 Basen, Koordinaten und Dimensionen

### Satz und Definition

Seien  $b_1, \dots, b_n \in V$  fixiert. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (i)  $\forall v \in V \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : v = \lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n$
- (ii)  $b_1, \dots, b_n$  sind linear unabhängig, und für jedes  $v \in V$  sind  $b_1, \dots, b_n, v$  linear abhängig

Wenn (i) bzw. (ii) erfüllt sind, dann heißt  $b_1, \dots, b_n$  Basis in  $V$ , und die Koeff  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  aus (i) heißen Koordinaten von  $v$  bzgl. der Basis  $b_1, \dots, b_n$

### Beispiel

Standard-Basis in  $\mathbb{R}^n : e_1 = [1, 0, \dots, 0], e_2 = [0, 1, \dots, 0], \dots, e_n = [0, 0, \dots, 1]$   
 $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \Rightarrow v_1 = \lambda_1, v_2 = \lambda_2, \dots, v_n = \lambda_n$

### Beispiel

$V = \mathbb{R}_n[x]$  Basis:  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . Sei  $p \in \mathbb{R}_n[x]$  bel fixiert.  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$   
 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  eindeutig durch  $p$  bestimmt.  $\Rightarrow a_0, a_1, \dots, a_n$  sind die Koordinaten von  $p$  bzgl der Basis  $1, x, x^2, \dots, x_n$

### Beispiel

$V = \mathbb{F}(\mathbb{R})$  besitzt keine Basis:

### Hauptsatz der Algebra

Ein Polynom vom Grad  $\leq n$ , das nicht das Nullpolynom ist, besitzt höchstens  $n$  Nullstellen.

### **Satz und Definition (Dimension)**

Wenn  $v_1, \dots, v_m$  und  $w_1, \dots, w_n$  zwei Basen in  $V$  sind, dann gilt  $m = n$ , und diese Zahl heißt Dimension von  $V$  und wird mit  $\dim V$  bezeichnet. Beispiele

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$$

$$\dim \mathbb{F}(\mathbb{R}) = \infty$$